

10-NA22

3次元有限要素法による光導波路解析の高速化と最適設計に関する検討

辻 寧英 (北見工業大学)

概要 光通信の高速・大容量化への要求を実現するため、そこで使われる光導波路のさらなる小型化・高性能化への要求がますます高まっている。こうした光導波路デバイスの性能を追求していくとデバイス構造が複雑化する傾向にあり、デバイス特性を正確に把握するためには解析的な近似を用いずに直接3次元構造を解析する必要がある。また、そこからさらに進めて、所望の特性を与えることでそれを実現する光導波路デバイスを発現させることができる最適設計への期待も高まっているが、有限要素法は任意形状への適用性に優れた汎用的な解析法として知られている。一方、解析領域を要素に分割する必要がある、さらに最終的に得られる方程式が大規模な連立一次方程式となるため大きな計算資源を必要とするなどの課題がある。本研究では、有限要素法による光導波路の3次元解析の高速化・高性能化と、有限要素法とトポロジー最適化を利用した光導波路の最適設計についての基礎的な検討を行っている。

1 研究の目的と意義

インターネットをはじめとする情報通信技術の発展に伴い、そこで扱われる情報は多種多様なものとなり、光通信システムでは動画像まで含めた大容量のデータを高速に伝送でき多様なデータに対応できるような柔軟なネットワークを構成できることが期待されている。光通信システムの性能を改善するためには、光ファイバ自身の特性はもちろんのこと、そこで使われる光導波路デバイスの性能向上が必須である。これまで、光導波路デバイスの設計は解析的近似解法や3次元構造を2次元構造に近似して行われることが多かった。しかし、光導波路デバイスはより高性能化を目指して小型化・複雑化する傾向にあり、計算機を利用した数値解析法により直接3次元解析することが求められるようになってきている。このようなことから、さまざまな数値解析法が開発されているが、なかでも有限要素法は時間領域、周波数領域両方の解析が可能で、任意形状への適用性に優れた汎用性の高い解析法である [1]-[3]。また、2次元有限要素法とトポロジー最適化を組み合わせたデバイスの自動最適設計法の開発も行われている [4]-[5]。しかしながら、有限要素法は最終的に大規模な連立一次方程式を解く必要があり、特に3次元問題に対しては計算規模がすぐに大きくなってしまいうという課題がある。

本研究では、光導波路解析のための汎用性の高い3次元有限要素法の開発とその計算の高速化を目指し、有限要素分割についての検討、連立一次方程式の解法についての検討を行う。有限要素法では要素分割の粗密を変えることで計算の効率化を図ることが可能であり、有限要素法により生成される行列が疎行列であることを利用することでメモリの削減が可能である。ここでは、光導波路中を伝搬する光波の分布に応じて要素分割に粗密をつ

けるアダプティブメッシュの開発を行うとともに、連立一次方程式の解法としてメモリの削減が可能な反復法の解の収束性と領域分割法による計算の効率化について検討を行う。

さらに、ここで開発する3次元有限要素法とトポロジー最適化を組み合わせたデバイス最適設計法を開発することにより、高性能な光導波路デバイスの設計を試みる。ここで開発する自動最適設計法では、必ずしも初期条件を与えなくてもデバイスの最適設計が可能であり、これまで知られていない新たなデバイス構造を見出せる可能性がある。

2 当拠点公募型共同研究として実施した意義

超大規模数値計算系応用分野において、北海道大学情報基盤センターと共同研究を行った。

光導波路デバイスの3次元有限要素法解析では、最終的に大規模な連立一次方程式を解く必要があり、するためには大容量のメモリを有する計算機が必要となる。大型計算機を利用することにより、通常のパーソナルコンピュータでは解析が困難であった大規模な解析が可能になり、より実的なモデルでの光導波路の解析・設計が行えるようになる。また、北海道大学情報基盤センターがこれまでに蓄積してきている大規模計算の効率化に関する多くの知識やセンターで開発している行列計算ライブラリーを利用することで、計算の効率化を図ることが期待される。

北海道大学情報基盤センターにおいては、計算の高速化のためのプログラムチューニングおよび大規模データ解析のための反復法ライブラリーの整備とカスタマイズを担当してもらった。

3 研究成果の詳細

本研究では、有限要素法に基づく光導波路デバイスの3次元解析の高速・高精度化と、これを利用した光導波路デバイスの最適設計についての検討を行った。

3.1 完全整合層を用いた有限要素法

有限要素法を用いた光導波路解析では、解析領域に接続された入出力導波路に対する境界条件の取扱いが問題になる。マイクロ波における導波管の問題では導波管モードに通常解析解が存在するため、モード展開に基づく解析の関係式を用いた境界条件が用いられていたが、光導波路には通常解析解は存在しないため、このモード展開には多大な計算時間を要する。さらに、行列のバンド幅が増大するという欠点もある。ここでは、まず文献[1]-[3]で提案した出力境界に完全整合層を用いた有限要素法の定式化を行う。これにより、非相反導波路を含む任意の異方性材料から構成される任意形状の光導波路に対して、多大な計算時間を要するモード展開をすることなく汎用的な有限要素法解析が可能となる。

図1に示すような光導波路を考え、入射面 Γ_{in} から光を入射する場合を考える。ここでは、一般的な任意異方性材料まで取り扱えるように、導波路を構成する材料の比誘電率テンソル $[\varepsilon]$ 、比透磁率テンソル $[\mu]$ が

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad [\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

と表される場合を考える。このとき、マクスウェルの方程式から、ベクトル波動方程式は

$$\nabla \times ([p]\nabla \times \Phi) - k_0^2[q]\Phi = 0 \quad (1)$$

で与えられる。ここに k_0 は自由空間波数であり、 Φ, Ψ, p, q は未知変数を電界とするか磁界とするかにより

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}, \quad \Psi = \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}, \quad [p] = [\mu]^{-1} \quad [q] = [\varepsilon] \\ \Phi &= \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}, \quad \Psi = -\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}, \quad [p] = [\varepsilon]^{-1} \quad [q] = [\mu] \end{aligned}$$

と表される。

解析領域を四面体エッジ要素を用いて離散化すると、電磁界ベクトル Φ は各要素内で

$$\begin{aligned} \Phi &= (\{U\}^T \mathbf{i}_x + \{V\}^T \mathbf{i}_y + \{W\}^T \mathbf{i}_z) \{\Phi\}_e \\ &= \{\mathbf{N}\}^T \{\Phi\}_e \end{aligned} \quad (2)$$

と表される。ここに $\{\Phi\}_e$ は各要素内边上での電磁界の辺方向の大きさ、 $\{U\}, \{V\}, \{W\}$ はそれぞれ x, y, z 方向成分に対する形状関数であり、 T は転置することを

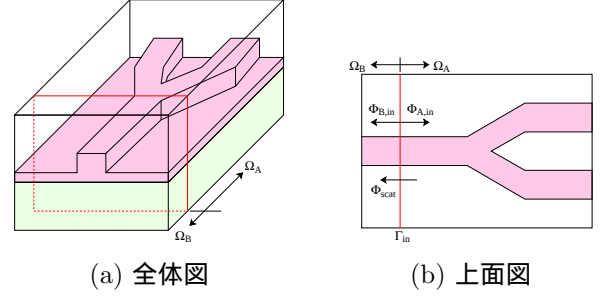


図1: 3次元光導波路

意味する。また、 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである。

いま図1(b)に示すような入射面 Γ_{in} を考え、領域 Ω_0 を部分領域 Ω_A, Ω_B に分け、各領域に対して有限要素法を適用すると最終的に以下の行列方程式を得る。

$$[P_i] \{\Phi_i\} = \{u_i\} \quad (3)$$

ここに下添字 $i = A, B$ は領域 i に関する量であることを表し、 $\sum_{e_i}$ は小領域 i に関する全要素の和を意味する。また、行列 $[P_i]$ 、ベクトル $\{u_i\}$ は以下のように与えられる。

$$[P_i] = [K_i] - k_0^2 [M_i] \quad (4)$$

$$[K_i] = \sum_{e_i} \iiint_{e_i} (\nabla \times \{\mathbf{N}\}) \cdot ([p]\nabla \times \{\mathbf{N}\}^T) dxdydz \quad (5)$$

$$[M_i] = \sum_{e_i} \iiint_{e_i} \{\mathbf{N}\} \cdot ([q]\{\mathbf{N}\}^T) dxdydz \quad (6)$$

$$\{u_i\} = -jk_0 \sum_{\Gamma_i} \iint_{\Gamma_i} \{\mathbf{N}\}_{\Gamma} \cdot (\mathbf{i}_n \times \Psi)|_{\Gamma_i} d\Gamma_i \quad (7)$$

であり、 $\{\mathbf{N}\}_{\Gamma_i}$ は境界 Γ_i における形状関数ベクトル、 $\sum_{e_i}$ は領域 Ω_i 内の全の要素についての和、 $\sum_{\Gamma_i}$ は境界 Γ_i に接する要素についての和を表し、境界 Γ_i は入射面 Γ_{in} と外部境界 Γ_{∞} からなる。

次に、領域 Ω_A と Ω_B に関する方程式をまとめて一つの方程式にするために、入射面 Γ_{in} 上の Φ の値からなるベクトルを $\{\Phi_i\}_{\Gamma}$ から $\{\Phi_i\}_{\Gamma}$ を取り除いたベクトルを $\{\Phi_i\}_0$ とすると、式(3)は

$$\begin{bmatrix} [P_i]_{00} & [P_i]_{0\Gamma} \\ [P_i]_{\Gamma 0} & [P_i]_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_i\}_0 \\ \{\Phi_i\}_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u_i\}_0 \\ \{u_i\}_{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (8)$$

いま、 Ω_A, Ω_B それぞれから見た入射面 Γ_{in} への入射電磁界を $\Phi_{i,in}$ 、散乱電界を $\Phi_{i,scat}$ ($i = A, B$) とすると、領域 Ω_i から見た Γ_{in} における電磁界 Φ_i は

$$\Phi_i = \Phi_{i,in} + \Phi_{i,scat} \quad (9)$$

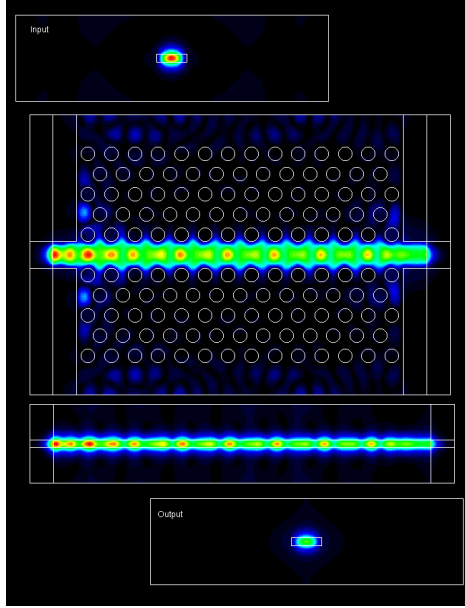


図 2: フォトニック結晶導波路中の光波の伝搬波形

と表され, 入射面 Γ_{in} における電磁界の連続性から

$$\mathbf{i}_n \cdot (\nabla \times \Phi_{A,scat})|_{\Gamma_{in}} = -\mathbf{i}_n \cdot (\nabla \times \Phi_{B,scat})|_{\Gamma_{in}} \quad (10)$$

$$\Phi_{A,scat}|_{\Gamma_{in}} = \Phi_{B,scat}|_{\Gamma_{in}} = \Phi_{scat}|_{\Gamma_{in}} \quad (11)$$

となるので, 領域 Ω_A, Ω_B に対する行列方程式 (8) を結合し, 入射は領域 Ω_A 方向のみでとすると, 最終的に解くべき行列方程式は

$$\begin{bmatrix} [P_A]_{00} & [0] & [P_A]_{0\Gamma} \\ [0] & [P_B]_{00} & [P_B]_{0\Gamma} \\ [P_A]_{\Gamma 0} & [P_B]_{\Gamma 0} & [P_A]_{\Gamma\Gamma} + [P_B]_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_A\}_0 \\ \{\Phi_B\}_0 \\ \{\Phi_{scat}\}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[P_A]_{0\Gamma}\{\Phi_{A,in}\}_\Gamma \\ \{0\} \\ \{u_{A,in}\}_\Gamma - [P_A]_{\Gamma\Gamma}\{\Phi_{A,in}\}_\Gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる. この定式化によりフォトニック結晶導波路の 3 次元解析を行った例を図 2 に示す. 誘電体スラブ導波路からフォトニック結晶導波路へ光を入射し, 再び誘電体スラブ導波路から光を取り出しているが, フォトニック結晶中には光が入っていない欠陥部を光が伝搬している様子を確認できる. また, 入出力部において, 導波路とは垂直な方向への光の伝搬も確認される.

3.2 有限要素分割の方法

有限要素法は領域分割型の解析法であり, 有限差分法などの方法に対して要素分割の粗密を変えることが定式化上は容易にできるという特徴を持つが, 実際の 3 次元構造に対する要素分割はそれほど容易ではない. ここでは,

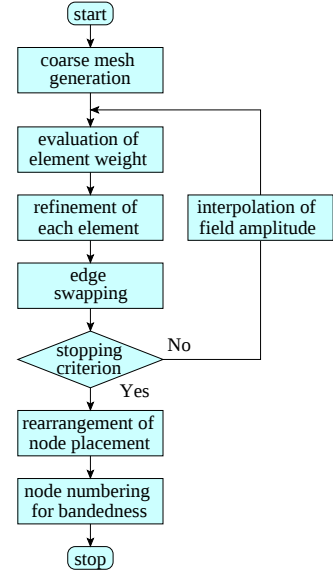


図 3: アダプティブメッシュの生成

光導波路中を伝搬する光波の電磁界分布に応じたアダプティブメッシュの生成を考える. アダプティブメッシュ生成の流れを図 3 に示す. 電磁界の変化が大きな領域の分割を細かくすることで計算効率を大幅に改善することができる.

図 4 に図 2 の解析に用いた有限要素メッシュの断面の分割の様子を示す. 電磁界振幅の変化の大きなところに効率的に要素が割り当てられていることがわかる.

3.3 大規模行列問題の解法

有限要素法では最終的に得られる方程式が大規模な連立一次方程式となる. 連立一次方程式の解法は直接法と反復法に大別されるが, 直接法は解析の際に非常に多くの計算機メモリを必要とし, 計算機が有するメモリ量により計算できる問題の規模が限られてしまう. 一方, 反復法は必要とするメモリ量を大幅に削減できるが, 反復計算が必ずしも収束しないという問題点がある. ここでは, まず電界を用いて定式化された有限要素法をポテンシャルを用いた表式に変更することで反復法の収束性を改善する.

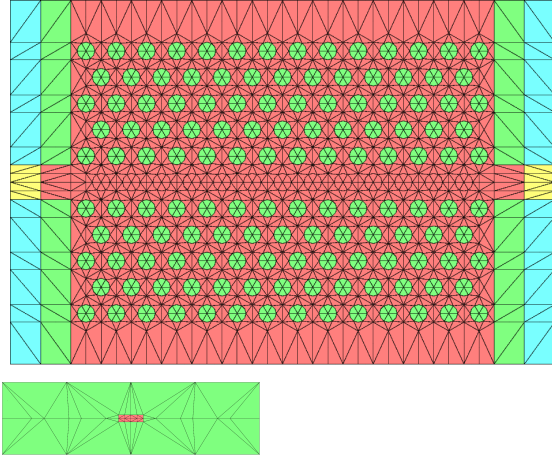
電界 E , 磁界 H とベクトルポテンシャル A , スカラーポテンシャル ϕ の間の関係を

$$\nabla \times A = -j\omega\mu_0 H \quad (13)$$

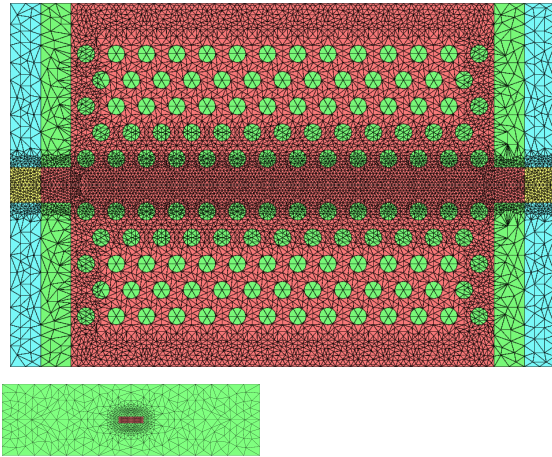
$$\nabla\phi + A = E \quad (14)$$

のように定義すると, E, A, ϕ の間には

$$E_{tmn} = A_{tmn} + (\phi_n - \phi_m)/l_{mn} \quad (15)$$



(a) 初期メッシュ



(b) 生成されたアダプティブメッシュ

図 4: フォトニック結晶導波路に対するアダプティブメッシュ

の関係が成り立つ．ここに E_{tmn} , A_{tmn} は電界およびベクトルポテンシャルの節点 m から n に向かう成分の大きさ, ϕ_m , ϕ_n は節点 m , n におけるポテンシャル, l_{mn} は節点 m , n の間の距離である．式 (15) から, 電界 E に基づく定式化とポテンシャル $A-\phi$ に基づく定式化の変換式は

$$\{E\} = \begin{bmatrix} [I] & [G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A\} \\ \{\phi\} \end{bmatrix} \quad (16)$$

で与えられ, 有限要素法の最終式は

$$\begin{bmatrix} [I] \\ [G]^T \end{bmatrix} [P] \begin{bmatrix} [I] & [G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A\} \\ \{\phi\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ [G]^T \end{bmatrix} \{u\} \quad (17)$$

のように書き換えられる．ここに変換行列中の $[I]$ は単位行列, $[G]$ は要素の辺と節点を関連付ける行列である．ここで得られた行列の次元数は元の行列の次元数より増大しているが, 冗長性を付加することにより反復法での

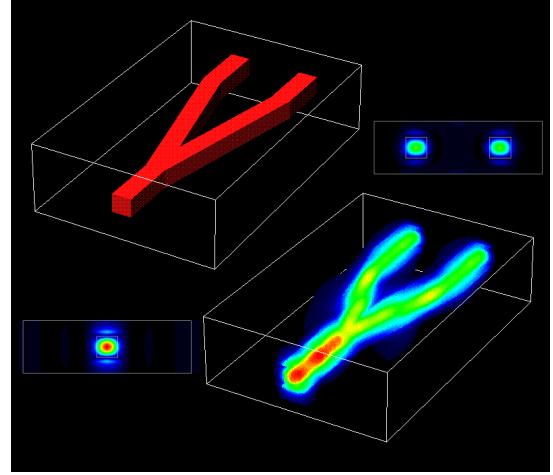


図 5: Y 分岐光導波路中の光波の伝搬

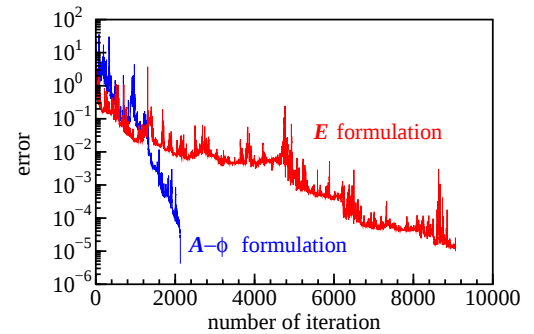


図 6: 反復法の収束の様子

解の収束性が向上する．図 5 に Y 分岐光導波路の 3 次元有限要素法解析の結果を示す．図 6 にはこのときの電界による定式化とポテンシャルによる定式化の場合の反復法の収束の様子を示す．ここでは反復法に双共役勾配法的一种である GP-BiCG 法を用いている．ポテンシャルによる定式化により反復法の収束性を大幅に改善できていることがわかる．

ポテンシャルによる定式化では電界による定式化に比べて反復法の収束性を改善できるが, 必ずしも全ての問題で良好な収束が得られるわけではない．次に, 図 7 に示すように, 解析領域を小領域に分割し, 各小領域の内部の点を直接法により消去して全体行列を領域境界上の値のみからなる行列方程式に縮約し, 得られた行列方程式を反復法により収束させる方法についても検討を行った．直接法で扱う行列のサイズが小さくなるため, 大幅にメモリを削減でき, 計算の並列化をすることで計算効率を改善できる．

まず, 簡単のため領域を 2 つに分ける場合を考えると

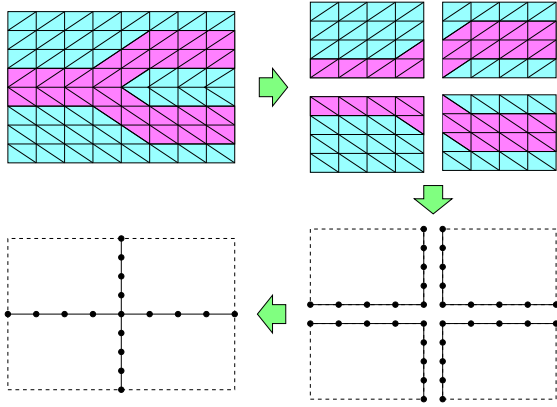


図 7: 領域分割法の概念図

有限要素法により得られる行列方程式は

$$\begin{bmatrix} [P_{11}] & [P_{1b}] & [0] \\ [P_{b1}] & [P_{bb}] & [P_{b2}] \\ [0] & [P_{2b}] & [P_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_1\} \\ \{\phi_b\} \\ \{\phi_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_b\} \\ \{u_2\} \end{bmatrix} \quad (18)$$

と表すことができる．ここに下添字 b は領域境界上の成分，下添字 i ($i = 1, 2$) は領域 i から領域境界を除いた成分を表す．まず，式 (18) の 1 行目，3 行目から以下の式を得る．

$$\{\phi_1\} = [P_{11}]^{-1} (\{u_1\} - [P_{1b}] \{\phi_b\}) \quad (19)$$

$$\{\phi_2\} = [P_{22}]^{-1} (\{u_2\} - [P_{2b}] \{\phi_b\}) \quad (20)$$

これを式 (18) の 2 行目に代入すると

$$[S_{bb}] \{\phi_b\} = \{f_b\} \quad (21)$$

のように書くことができる．ここに

$$[S_{bb}] = [P_{bb}] + [P_{b1}] [P_{11}]^{-1} [P_{1b}] + [P_{b2}] [P_{22}]^{-1} [P_{2b}] \quad (22)$$

$$\{f_b\} = \{u_b\} - [P_{b1}] [P_{11}]^{-1} \{u_1\} - [P_{b2}] [P_{22}]^{-1} \{u_2\} \quad (23)$$

である．この方程式を解いて $\{\phi_b\}$ が求まると式 (19)，式 (20) により， $\{\phi_1\}$ ， $\{\phi_2\}$ が求まる．式 (21) は領域境界成分のみの方程式であり，全体行列に比べて行列サイズが大幅に縮小されている．しかしながら， $[S_{bb}]$ は密行列となるため，この連立一次方程式を直説法で解くことは通常あまり効率的ではなく，反復法を利用して解くことになる．ここで用いる反復法は通常の連立一次方程式に対する反復法と同じものを使うことができる．

ここまで領域が 2 つの場合について述べたが，領域が N 個の場合には

$$[S_{bb}] \{\phi_b\} = \{f_b\} \quad (24)$$

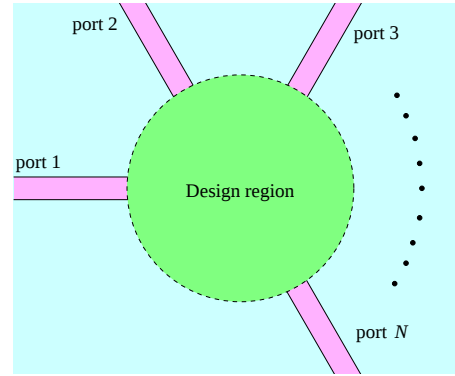


図 8: 最適化の問題設定

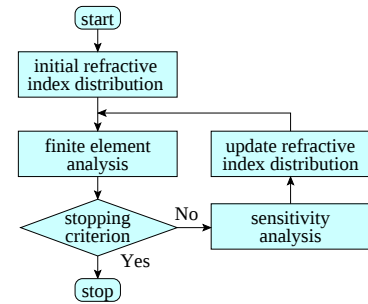


図 9: 最適化の流れ

$$[S_{bb}] = [P_{bb}] + \sum_i^N [P_{bi}] [P_{ii}]^{-1} [P_{ib}] \quad (25)$$

$$\{f_b\} = \{u_b\} - \sum_i^N [P_{bi}] [P_{ii}]^{-1} \{u_i\} \quad (26)$$

とすればよい．

3.4 トポロジー最適化を用いた 3 次元光導波路デバイスの最適設計

トポロジー最適化では，最適化領域内の屈折率分布をいくつかの数値パラメータにより表現し，そのパラメータの変化による特性の変化（感度）を求め，その感度に基づいてパラメータを更新することで特性が改善する方向に最適化領域内の屈折率分布を更新する．これを繰り返していくことで最終的に所望の特性を実現する光導波路デバイスを見出すことができる．

図 8 に示すような光導波路デバイスを考え，port 1 から光を入射してそれぞれのポートに所望の出力が得られる設計領域内の屈折率分布を求める最適化問題を考える．図 9 に最適化の流れをフローチャートとして示す．まず，設計領域内に適当な初期屈折率分布を与え，有限要素法による光導波路解析を行い入出力特性を求める．次に，感度解析により屈折率分布を微小変化させた場合の特性

の変化を調べ、特性が改善する方向に屈折率分布を更新する。この手順を繰り返すことで所望の特性を実現する光導波路デバイス構造を得ることができる。屈折率分布の変化に対する感度を知るためには、実際に構造を変化させてみて特性を調べるのもひとつの方法であるが、そのためには新たな光導波路解析が必要であり、最適化するパラメータが増えるとその計算量は膨大になる。ここでは、構造の変化に対する特性の変化を効率的に調べる方法として、随伴変数法 (AVM) を用いている。

光導波路デバイスの伝送特性を有限要素法により解くものとする、最終的に以下のような行列方程式を得る。

$$[P]\{\Phi\} = \{u\} \quad (27)$$

いま port 1 から光を入射したとして式 (27) を解いて伝搬界分布 $\{\Phi\}$ が求まると、第 n 番目の導波路の導波路への固有モードの振幅透過係数 S_{n1} は

$$S_{n1} = \{\Phi\}^T \{g_n\} \quad (28)$$

として求めることができる。ベクトル $\{g\}$ は

$$\{g_n\} = \frac{c\beta_i}{k_0} ([M_{tt}]\{\phi_{t,n}\} + [M_{tz}]\{\phi'_{z,n}\}) \quad (29)$$

で与えられる。

まず、導波路が等方性媒質からなる場合を考え、比誘電率分布が M 個のパラメータ a_i ($i = 1, 2, \dots, M$) により

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(a_1, a_2, \dots, a_M) \quad (30)$$

と表されているとする。このとき、 i 番目のパラメータ a_i が微小変化したときの $|S_{n1}|^2$ の変化は以下の式で表される。

$$\frac{\partial |S_{n1}|^2}{\partial a_i} = S_{n1} \frac{\partial S_{n1}^*}{\partial a_i} + \frac{\partial S_{n1}}{\partial a_i} S_{n1}^* \quad (31)$$

ここで、式 (31) 中の $\partial S_{n1}/\partial a_i$ は随伴変数法 (AVM) を用いることで効率的に計算することができる。 $\partial S_{n1}/\partial a_i$ をパラメータ a_i の変化に伴う電磁界分布の変化を用いて

$$\frac{\partial S_{n1}}{\partial a_i} = \sum_j \frac{\partial S_{n1}}{\partial \Phi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial a_i} = \left\{ \frac{\partial S_{n1}}{\partial \Phi} \right\}^T \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial a_i} \quad (32)$$

のように表すことができる。一方、入出力および仮想境界は最適化領域に含まれないとして、有限要素法の最終式 (27) を ε_r で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial [P]}{\partial a_i} + [P] \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial a_i} &= \frac{\partial \{u\}}{\partial a_i} \\ \rightarrow \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial a_i} &= -[P]^{-1} \frac{\partial [P]}{\partial a_i} \{\Phi\} \end{aligned} \quad (33)$$

と表すことができ、これを式 (32) に代入すると

$$\frac{\partial S_{n1}}{\partial a_i} = -\{\lambda_n\}^T \frac{\partial [P]}{\partial a_i} \{\Phi\} \quad (34)$$

の表現を得る。ここで、 $\{\lambda_n\}$ を表す式は

$$\{\lambda_n\}^T = \left\{ \frac{\partial S_{n1}}{\partial \Phi} \right\}^T [P]^{-1} \quad (35)$$

であり、式 (28) を考慮すると式 (35) は

$$[P]^T \{\lambda_n\} = \{g_n\} \quad (36)$$

と表すことができる。したがって $\{\lambda_n\}$ は有限要素法解析を 1 回行う程度の計算量で求めることができ、 $[P]$ が対称行列で有限要素法解析のときに分解計算がなされている場合には単なる代入計算により高速に求めることができる。

また $\partial [P]/\partial a_i$ は具体的には未知変数が電界の場合には

$$\frac{\partial [P]}{\partial a_i} = -k_0^2 \sum_e \iint_e \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_i} \{N\} \cdot \{N\}^T dx dy dz \quad (37)$$

未知変数が磁界の場合には

$$\begin{aligned} \frac{\partial [P]}{\partial a_i} &= - \sum_e \iint_e \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_i} \frac{1}{\varepsilon_r^2} (\nabla \times \{N\}) \\ &\quad \cdot (\nabla \times \{N\}) dx dy dz \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられる。

光導波路デバイスの構造を表す屈折率分布は様々な方法により定義することが可能であるが、一般的に広く用いられている密度法では、設計で想定する材料の中間的な屈折率を持った材料領域 (グレイ領域) が発生する問題がある。ここでは文献 [5] で提案している関数展開法を用いている。この方法ではグレイ領域の問題を本質的に取り除くことができる。

標準的な 2 媒質を対象とした関数展開法では最適化領域内の比誘電率分布を適当な解析関数 $w(y, z)$ を用いて以下のように表現する。

$$\varepsilon_r(x, y, z) = \varepsilon_{ra} + (\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra}) H(w(x, y, z)) \quad (39)$$

ここで、 ε_{ra} 、 ε_{rb} は使用可能な 2 つの材料の比誘電率、 $H(\xi)$ は ξ の値によって 0 か 1 かの値を取る関数であり、 ε_r は $w(x, y, z)$ の値によって ε_{ra} あるいは ε_{rb} のどちらかの比誘電率となる。ただし、実際には ε_r が微分可能となるように、 $H(\xi)$ は以下のように定義される連続関数とする。

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi \leq -h) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\xi + h}{h} \right)^2 & (-h < \xi < 0) \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi - h}{h} \right)^2 & (0 \leq \xi < h) \\ 1 & (\xi \geq h) \end{cases} \quad (40)$$

ここに h は $H(\xi)$ が連続関数となるように導入された量であり, $-h < w(x, y, z) < h$ となる領域において比誘電率は中間的な値をとりうるが, h を十分に小さく取ることによってグレー領域を小さくでき, 最終的に $h \rightarrow 0$ とすることでグレー領域を除去することができる. h の具体的な大きさは, 最適化領域内のグレー領域の占める割合を指定することで決定することができる.

最適化領域内の屈折率分布を決める関数 $w(x, y, z)$ は一般的に

$$w(x, y, z) = \sum_i a_i f_i(x, y, z) \quad (41)$$

の形で与えられる. このとき, 式 (37), (38) 中の $\partial \varepsilon_r / \partial a_i$ は

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_i} = f_i(x, y, z) (\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra}) \times \begin{cases} 0 & (\xi \leq -h) \\ \frac{\xi + h}{h^2} & (-h < \xi < 0) \\ 1 - \frac{h - \xi}{h^2} & (0 \leq \xi < h) \\ 0 & (\xi \geq h) \end{cases} \quad (42)$$

と求めることができる. この方法の特徴の一つとして, なんらかの対称性を有する構造を見出したい場合に, $f_i(x, y, z)$ として目的の対称性を持った関数を選ぶことで容易に対称性を導入できることがある. $f_i(y, z)$ の選び方は特に決まったものではなく様々なものが考えられる.

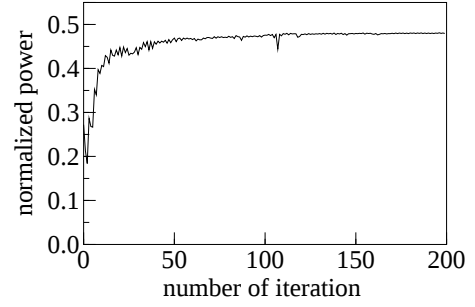
ここでは関数 $w(x, y, z)$ を以下のようにフーリエ級数の形で表現することにする.

$$w(x, z) = \sum_{i=-N_x}^{N_x-1} \sum_{j=-N_z}^{N_z-1} (a_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (43)$$

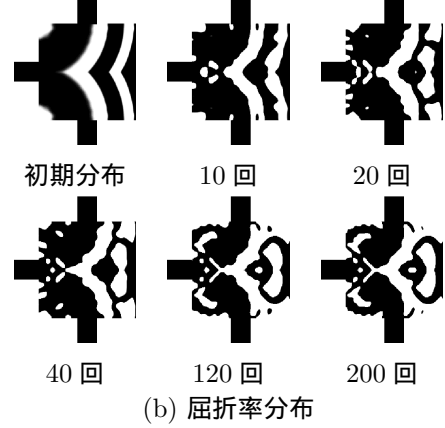
$$\theta_{ij} = \frac{2\pi i}{L_x} x + \frac{2\pi j}{L_z} z \quad (44)$$

ここに N_x, N_z はそれぞれ x 方向, z 方向の展開項数を表し, L_x, L_z はフーリエ級数の周期を表す. フーリエ級数は本来周期関数を表現するためのものであるが, 最適化構造が周期構造となる制約条件が加わることは必ずしも好ましくない. その場合には, 最適化領域の x, z 方向の幅を W_x, W_z として, $L_x > W_x, L_z > W_z$ とする必要がある. 感度解析に基づき a_i, b_i を更新していくことにより最適な光導波路デバイス構造を見出すことができる.

図 10~12 に, 背景を SiO_2 , 導波路を Si とする光導波路分岐の最適化の例を示す. 最適化領域のサイズは $2 \mu\text{m}$ 四方としている. 図 10 は最適化の過程における各分岐ポートへの規格化透過パワー (最適値は 0.5) の変化とそのときの屈折率分布の変化の様子を示している. 初期構



(a) 各ポートの規格化透過パワー



(b) 屈折率分布

図 10: T 分岐導波路の最適化の様子



図 11: 最適化された T 分岐導波路の屈折率分布

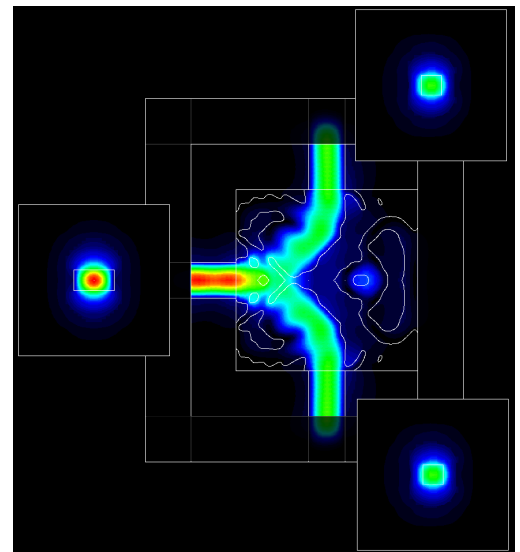


図 12: 最適化された T 分岐導波路中の光の伝搬波形

造には存在しない構造が自動的に発現していることがわかる．図 11 には得られた最適化構造を，図 12 にはそのときの光の伝搬の様子を示している．放射損失の少ない小型な曲がりを実現できていることがわかる．

4 これまでの進捗状況と今後の展望

3 次元光導波路解析のための有限要素法の高性能化を行い，有限要素法とトポロジー最適化を用いることで 3 次元光導波路デバイスの最適設計を行えることを示した．

これまでに，有限要素法の計算効率の改善のために，伝搬光分布に対応して要素の粗密を自動的に変化させるアダプティブメッシュの開発を行い，計算精度を損なわずに計算規模を縮小することが可能になった．また，有限要素法により生成される大規模連立一次方程式の解析法についての検討をいくつか行った．プログラムチューニングによる高速処理の実現ならびに反復法ライブラリによる大規模解析の可能性を得ることができた．しかし，より大規模な問題では反復法による計算が収束しない場合があることが明らかになった．

さらに，ここで効率化を行った 3 次元有限要素法を用いて，光導波路のトポロジー最適設計プログラムの開発を行った．本手法を実際に 3 次元光導波路の最適設計に用い，比較的小型な光導波路デバイスに対しては実用的な時間で最適設計が行えることが確かめられた．しかし，ここで行った最適化例はまだ比較的単純な問題であり，波長選択デバイス，非相反性を含む任意異方性媒質からなる導波路デバイスなどへの適用性については最適化のための初期条件や反復計算における最適な屈折率更新の方法などまだ検討すべきことが残されている．

今後はより大規模な問題への適用を目標として，これまでに連立一次方程式の反復解法で収束解が得られなかった問題に対しても適用可能な反復解法およびその前処理法についての検討，および領域分割法に基づく計算の効率化についてさらに検討を進める予定である．また，ここで得られた成果を基に，光導波路デバイスの最適設計プログラムのさらなる改良を行い新たな光デバイスの可能性を探る予定である．

5 研究成果リスト

- (1) M. Eguchi and Y. Tsuji, Bending Loss Evaluations of Holey Fibers Having a Core Consisting of an Elliptical-Hole Lattice by Various Approaches IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 46, No. 5, pp.601-609, May 2010.
- (2) 瀬田純己, 辻 寧英, 平山浩一, 遺伝的アルゴリズムによるモード結合を利用した光デバイスの設計に関する検討, 電磁界理論研究会資料, EMT-10-78, 2010 年 7 月．

- (3) 藤本幸太, 辻 寧英, 平山浩一, 関数展開法と SVEA に基づくトポロジー最適化による光デバイスの設計に関する検討, 電磁界理論研究会資料, EMT-10-79, 2010 年 7 月．
- (4) 藤本 幸太, 辻 寧英, 平山 浩一, 関数展開法を用いたトポロジー最適化における屈折率表現に関する検討, 平成 22 年度電気・情報関係学会北海道支部連合大会, 112, 2010 年 10 月．
- (5) 藤本幸太, 辻 寧英, 平山浩一, 光回路設計のためのトポロジー最適化における関数展開法の屈折率表現に関する検討, 電磁界理論研究会資料, EMT-10-160, 2010 年 11 月．
- (6) 江口真史, 辻 寧英, 楢円ホールコア円形ホールホーリーファイバと単一モードファイバの接続損失の評価, 光ファイバ応用技術研究会, 2010 年 11 月．
- (7) M. Eguchi and Y. Tsuji, Bending loss of elliptical-hole core circular-hole holey fibers bent in arbitrary bending directions, OSA Applied Optics, Vol. 49, No. 32, pp.6207-6212, Nov. 2010.

参考文献

- [1] Y. Tsuji and M. Koshiba, Finite element method using port truncation by perfectly matched layer boundary conditions for optical waveguide discontinuity problems, *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, Vol. 20, No. 3, pp. 463-468, March 2002.
- [2] N. Kono and Y. Tsuji, Oriented perfectly matched layer with flexible parameters for waveguide discontinuity problems, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 16, No. 4, pp. 1089-1091, April 2004.
- [3] N. Kono and Y. Tsuji, A novel finite-element method for nonreciprocal magneto-phonic crystal waveguides, *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, Vol. 22, No. 7, pp. 1741-1747, July 2004.
- [4] Y. Tsuji, K. Hirayama, T. Nomura, K. Sato, and S. Nishiwaki, Design of Optical Circuit Devices Based on Topology Optimization, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 18, No. 7, pp. 850-852, April 2006.
- [5] Y. Tsuji, and K. Hirayama, Design of Optical Circuit Devices Using Topology Optimization Method With Function-Expansion-Based Refractive Index Distribution, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 20, No. 12, pp. 982-984, June 2008