11-NA07

# 精度保証付き多倍長並列演算環境の構築と計算機援用解析への展開

山本 野人（電気通信大学・研究課題責任者）
藤原 宏志（京都大学） 渡部 善隆（九州大学）
松田 望（電気通信大学） 木下 武彦（京都大学）

**概要:** 既存のものより高速でメモリ効率が良く使いやすい精度保証付き多倍長並列演算ライブラリを作成し，数学的未解決問題に対する計算機援用証明への応用を目指すことを目的とする．これまでに，中心値・半径型の精度保証付き多倍長演算に適した演算手法を考案し，四則演算と平方根の計算が可能なライブラリの実装を完了した．また，exflib の区間演算インターフェースの開発，Orr-Sommerfeld 方程式に対する局所一意性付き計算機援用証明理論の構築を行った．

## 1 研究の目的と意義

### 1.1 研究の目的

本共同研究は，数学的に厳密な意味で丸め誤差を制御することのできる精度保証付き多倍長並列演算環境を設計・実装し，これまで解析的な解の存在証明の達成が困難とされてきた生物科学・流体力学・電磁気学分野の方程式に対する計算機援用証明に適用することを目的とする．

精度保証付き多倍長演算環境は，correct rounding を保証する誤差制御機能を有する拡張精度浮動小数点演算環境と区間演算を基盤とし，各種数学関数・線形計算ライブラリを整備する．適用を目指す具体的な問題は，

- 2 次元 FitzHugh-Nagumo 型反応拡散方程式系に対する Legendre/Chebyshev 多項式基底展開による解の包含
- 3 次元 Maxwell 方程式に関するスペクトル・ギャップの存在検証
- Navier-Stokes 方程式の線形安定性理論から導かれる非自己共役固有値問題に対する計算機援用証明

であり，通常の浮動小数点演算を用いた数値シミュレーションによって得られる近似解の周りで，数学的な厳密解の存在を検証するとともに，定量的な誤差限界を与えることを最終的な目標とする．

### 1.2 研究の意義

現在の多くの科学技術計算で実行される実数値・複素数値の計算は，IEEE754 標準規格に代表される有限桁の浮動小数点数による近似計算であり，実数型・複素数型変数に対して実行される四則演算結果には，丸め誤差と呼ばれる近似誤差が不可避的に混入する．また，マルチコア・分散並列におけるコーディングを行う場合には，問題によってはプロセス／スレッドに対する演算の配置・集約の際の同期の違いなどにより丸め誤差の累積が大きく異なることがある．そのような計算結果が得られた際に，プログラミングレベルあるいは丸め誤差レベルのどちらで切り分けを行うべきか判断に迷う状況も生じる．その意味で，累積丸め誤差が計算結果を破綻へと導く非適切問題に限らず，経験的に安定であることが知られている計算過程においても，丸め誤差の影響を実用的な時間で確認できる「検算」としての多倍長計算環境への期待が高まっている．

一方，近年，IEEE754 標準倍精度の浮動小数点演算における丸め誤差を含む演算結果の

保証が理論的にも実用的にも高い精度で効率よく実現できることか明らかにされ，計算結果の信頼性（品質保証）の問題が計算理工学の分野で広く取り上けられることとなった．また，計算結果の信頼性の問題は数値解法アルゴリズムそのものにも影響を与え，様々な数理科学上に現れる問題の解それ自体を数学的な厳密さで検証するという方向にまで進展しつつある．この種の数値計算法は計算機援用証明または精度保証付き数値計算法と呼ばれ，科学技術計算のあるべき一つの方向として考えられている．

以上の背景を踏まえ，数値シミュレーションの結果に対し，丸め誤差の影響も考慮した数学的に厳密な検証が任意の桁数で可能となる精度保証付き多倍長並列演算環境の構築とその精度保証への展開を目指すものである．

## 2 当拠点公募型共同研究として実施した意義

### (1) 共同研究を実施した大学名

九州大学

### (2) 共同研究分野

超大規模数値計算系応用分野

### (3) 当公募型共同研究ならではという事項など

共同研究を実施している構成拠点である九州大学情報基盤研究開発センターでは，過去「多倍長・高精度計算フォーラム」を企画・開催した実績があり，専門的知識を持つ教員によるコーディネイトによって，精度保証付き多倍長演算環境が必要となる未解決問題を持つ計算科学分野の研究者の抱える問題点や要望を設計段階から反映することができた．

また，九州大学情報基盤研究開発センターは，スーパーコンピュータシステム，高性能演算サーバシステム，および高性能アプリケーションサーバシステムを時期をずらして更新しており，最新かつ様々な計算機アーキテクチャおよびソフトウェア環境を汎用的な多倍長演算ライブラリ開発のために活用できることも構成拠点（九州大学）の特長のひとつだといえる．

## 3 研究成果の詳細

本章では，これまでの研究成果のうち，代表的なものを 3 件報告する．

### 3.1 精度保証付き多倍長演算 C++ クラスライブラリ

精度保証付き数値計算は，区間演算によって実現される．区間演算における区間の実装としては，区間の下端と上端を保持する方法，区間の中心値と半径を保持する方法の 2 つが考えられる．このうち，より多く用いられているのは，実装の容易な下端・上端型であり，これは精度保証付き多倍長演算でも同様である．

しかし，精度保証付き多倍長演算の場合，実装方法を工夫することによって，下端・上端型よりも中心値・半径型の方が，計算速度・メモリ効率の両面で有利になる．中心値・半径型の精度保証付き多倍長演算の実装としては，既に INTLAB(INTerval LABoratory) があるが，これは暫定的なものであって，最適な実装とは言えない．我々は中心値・半径型の精度保証付き多倍長演算に適した演算手法を考案し，四則演算と平方根の計算が可能なライブラリを実装した．

結果，下端・上端型では区間演算に点の演算の 2 倍の時間がかかるところ，加算・減算・乗算でほぼ 1 倍，時間のかかる除算でも 1.8 倍の計算時間を実現できた．ただし，計算速度そのものは既存のライブラリに劣っており，本手法を既存のライブラリに組み込むことに

よって，より実用的な精度保証付き多倍長演算が実現できると考えられる．

## 3.2 exflib における Fortran 区間演算インターフェース

本節では，多倍長計算環境 exflib の一部として構築した実数の区間演算の Fortran 90 用インターフェースについて述べる．

### 3.2.1 データ構造

本インターフェースでは，モジュールによって多倍長精度の実数区間を定義し，その区間に対する四則演算，入出力などを提供している．現在のところ，組み込み函数は提供していない．これは，多倍長精度での組み込み函数に対し，厳密な丸めをおこなう最適な (高速な) アルゴリズムが充分に確立されていないことに起因する．実際，倍精度の組み込み函数においても，ライブラリ (コンパイラ) によって最近値丸めが異なる場合があることが報告されている．

本インターフェースでは，実数を，それを含む区間の上端と下端によって表現する．この上端と下端は，多倍長精度の浮動小数点数 exfloat 型によって保持する．したがって，多倍長精度の区間の保持には，多倍長数の 2 倍のメモリ容量を必要とする．例えば，10 進 100 桁の精度の場合，exfloat 型の数は符号・指数・仮数部を合わせて 56 バイト，本研究の区間データは 112 バイトとなる．

演算の精度はコンパイル時に決定される．インターフェースを通じて区間を操作する限り，この精度はプログラム実行中に変更することはできず，別途，exflib の函数を呼び出して精度を変更する必要がある．

### 3.2.2 実装済みの演算

上述のとおり，現在は実数区間に対する四則演算，組み込みの整数型との四則演算，代入・型変換，10 進法での出力を提供している．四則演算および代入は，Fortran 90 の演算子多重定義の機能を利用し，組み込みの演算と同様の利用が可能となっている．

ユーザプログラムでは，まずプログラム単位の最初に本モジュール `exflib_interval` を利用すること，ならびに多倍長精度の変数 `TYPE(exfival)` を宣言する．例えば，多倍長精度の区間変数 x, y, z に対し，

```
USE exfival
TYPE(exifval) :: x, y, z
z = x + 1
z = x + y
```

などと記述する．それぞれの加法は，引数の型に応じて加算を実現するモジュール函数がバインドされて，演算が実行される．ただし，組み込みの単精度型および倍精度型との四則演算は，これらの引数が丸め誤差を含むことから禁止している．

Fortran 90 の出力は C++ 言語とは異なり，演算としては実装されていない．したがって本モジュールにおいても多倍長精度の区間の出力に際して別途の処理が必要となり，

```
WRITE(*,*) TRIM(exflib_format('F', x))
WRITE(*,*) TRIM(exflib_format('E', x))
```

などと記述する．前者は固定小数点型フォーマット，後者は浮動小数点型フォーマットでの出力であり，区間の上端と下端が出力される．精度などの出力指示子は Fortran 90 の組み込みの型と同様である．現在のところ，これらで出力される上端と下端の値は 10 進法で最近値に丸められた値であり，注意を要する．

また，10 進法での代入は

```
x = exflib_exfival('1.0', '1.1')
```

のようにおこなうことが可能である．これにより，1.0 以上，1.1 以下の区間を表現する．実際には 10 進法の 1.1 は 2 進法の浮動小数点数では有限桁で表現されないため，1.1 は上に丸めて得られる浮動小数点数として保持される．また，シングルクオーテーションで

囲まれる文字列中には，四則演算，数学定数 `#PI`, `#E` を記述することができる．

### 3.2.3 四則演算のアルゴリズム

exflib の四則演算は，演算結果を最近値，正の無限大，負の無限大，0 方向の 4 方向に丸める函数を提供している．本モジュールの区間演算はこの機能を利用して実装されている．例えば区間の加算は，演算区間および被演算区間の上端同士を加え，その結果を正の無限大の方向に丸め，同時に下端同士を加えてその結果を負の無限大の方向に丸めている．

これら上端・下端の計算は並列におこなえるが，本モジュールでは現在のところ並列化を行っていない．これは，科学技術計算では可能な限り大きなブロックでの並列化が効率的であり，本モジュールの各四則演算は比較的小さな単位と考えられるためである．

### 3.2.4 区間操作の函数

区間操作の函数として，

- 区間型のメモリ容量の取り出し: `exflib_get_exfival_byte()`
- 区間の幅 `exflib_width()`
- 区間の中心 `exflib_center()`
- 区間の上端 `exflib_upper()`
- 区間の下端 `exflib_lower()`

などを提供している．

## 3.3 Orr-Sommerfeld 方程式に対する計算機援用証明

本節では，3.1, 3.2 節の多倍長精度保証環境の具体的な適用例としてアルゴリズムの整備を進めている，Orr-Sommerfeld 方程式に対する計算機援用証明理論の概要 (定式化部分) について述べる．

### 3.3.1 問題

1 次元領域 $\Omega := (x_1, x_2)$ および微分作用素 $\tilde{\Delta} := -D^2 + a^2$ に対し，非圧縮性流れの線形安定性を記述する基礎方程式のひとつである Orr-Sommerfeld 方程式:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 u + iaR[V\tilde{\Delta} + V'']u = \lambda\tilde{\Delta}u, \\ u(x_1) = u(x_2) = u'(x_1) = u'(x_2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．$V$ は基礎流れであり，具体的な検証の段階では Poiseuille 流れ:

$$V = 1 - x^2,\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 1,\ \ a, R > 0 \tag{2}$$

に設定する．ただし，定式化はより一般的な $V$ に対して可能である．

### 3.3.2 空間設定

$L^2(\Omega)$ を $\Omega$ 上の複素 $L^2$ 空間とし，$L^2(\Omega)$ の内積とノルムを $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ および $\|v\| := \sqrt{(v,v)_{L^2}}$ で表記する．整数 $k$ に対し，$H^k(\Omega)$ を階数 $k$ の $\Omega$ 上の $L^2$-Sobolev 空間とし，ノルムを $\|v\|_{H^k} := \sqrt{\sum_{j=0}^{k} \|d^j v/dx^j\|^2}$ で定義する．また，$H_0^2(\Omega)$ を $H^2(\Omega)$ に属する関数で端点における値および微分値が 0 となるもの全体の集合とおく．この時，$\|v\|_{\tilde{\Delta}} := \|\tilde{\Delta}v\|$ は $\|v\|_{H^2}$ と同値なノルムであり，$(\tilde{\Delta}v, \tilde{\Delta}w)_{L^2}$ を $H_0^2(\Omega)$ の内積と定めることができる．次に，Hilbert 空間 $X := H_0^2(\Omega) \times \mathbb{C}$ を内積

$$([u_1, \xi_1]^T, [u_2, \xi_2]^T)_X := (\tilde{\Delta}u_1, \tilde{\Delta}u_2)_{L^2} + \xi_1\bar{\xi_2}$$

および内積から導かれるノルム $\|\cdot\|_X$ の下で導入する．また，$X^4 := (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times \mathbb{C}$ とする．さらに，Hilbert 空間 $X^0 := L^2(\Omega) \times \mathbb{C}$ を内積

$$([u_1, \xi_1]^T, [u_2, \xi_2]^T)_{X^0} := (u_1, u_2)_{L^2} + \xi_1\bar{\xi_2}$$

および内積から導かれるノルム $\|\cdot\|_{X^0}$ の下で定義する．

### 3.3.3 引き戻しと Newton 型方程式

$u_0 \in H_0^2(\Omega)\backslash\{0\}$ と $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ を固定し，固有関数に対する正規化条件を課すことにより，式 (1) を $[u,\lambda]^T \in X^4$ を求める問題:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 u &= [\,(-iaRV+\lambda)\tilde{\Delta} - iaRV''\,]\,u \\ (\,u,u_0\,)_{L^2} &= \xi. \end{cases} \tag{3}$$

に書き直す．次に，適当な近似解法で求めた式 (3) の近似固有対

$$w_h := [u_h, \lambda_h]^T \in X^4$$

を定め，近似解を用いた残差方程式に変換する．固有値と固有関数のノルムスケールを調整するパラメータ $s > 0$ に対し，近似固有対 $w_h = [u_h, \lambda_h]^T$ に対する残差:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} s(u-u_h) \\ \lambda - \lambda_h \end{bmatrix} \tag{4}$$

を定める．式 (4) を式 (3) に代入することにより，

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 \hat{u} &= f[\hat{u},\hat{\lambda}]^T, \\ (\,\hat{u},u_0\,)_{L^2} &= s(\xi - (\,u_h,u_0\,)_{L^2}), \end{cases} \tag{5}$$

を得る．$f$ は

$$f[u,\lambda]^T := [\,(-iaRV+\lambda_h+\lambda\,)\tilde{\Delta} - iaRV''\,] \times (su_h+u) - s\tilde{\Delta}^2 u_h. \tag{6}$$

であり，$X$ から $L^2(\Omega)$ への連続写像，かつ，$X$ の有界集合を $L^2(\Omega)$ の有界集合に移すことを確認することができる．

ここで，式 (5) と同値な次の Newton 型方程式:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}^2 \hat{u} - f'(0)[\hat{u},\hat{\lambda}]^T = f[\hat{u},\hat{\lambda}]^T - f'(0)[\hat{u},\hat{\lambda}]^T, \\ (\,\hat{u},u_0\,)_{L^2} = s(\xi - (\,u_h,u_0\,)_{L^2}) \end{cases} \tag{7}$$

を考える．ここに，$f'(w)$ は $f$ の $w$ における Fréchet 微分であり，具体的には

$$f'(0)[u,\lambda]^T = [\,(-iaRV+\lambda_h\,)\tilde{\Delta} - iaRV''\,]\,u + \lambda s\tilde{\Delta}u_h$$

である．

### 3.3.4 解の存在検証条件

線形作用素 $\mathcal{L} : X^4 \to X^0$ を

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}^2 u - f'(0)[u,\lambda]^T \\ (\,u,u_0\,)_{L^2} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

また，残差 $\delta > 0$ を

$$\delta^2 := s\|{-\tilde{\Delta}^2}u_h + [(-iaRV+\lambda_h)\tilde{\Delta} - iaRV'']u_h\|^2 + |\xi - (\,u_h,u_0\,)_{L^2}|^2 \tag{9}$$

で定める．ここで，以下を仮定する．

1. $\mathcal{L}$ は逆作用素 $\mathcal{L}^{-1} : X^0 \longrightarrow X^4$ を持つ．
2. 数値的に決定可能な $\mathcal{M} > 0$ が存在し，

$$\|\mathcal{L}^{-1}\phi\|_X \le \mathcal{M}\|\phi\|_{X^0}, \quad \forall \phi \in X^0 \tag{10}$$

を満たす．

このとき，Banach の不動点定理に基づく解の存在検証定理を得ることができる．

**Theorem 1**

$$\beta := \sqrt{1 - 2\delta\mathcal{M}^2} > 0 \tag{11}$$

であれば，式 (3) を満たす固有対 $[u,\lambda]^T \in X^4$ が

$$\left\| \begin{bmatrix} s(u-u_h) \\ \lambda - \lambda_h \end{bmatrix} \right\|_X \le \frac{1-\beta}{\mathcal{M}} \tag{12}$$

に存在する．また，$[u,\lambda]^T$ は

$$\left\| \begin{bmatrix} s(u-u_h) \\ \lambda - \lambda_h \end{bmatrix} \right\|_X < \frac{1+\beta}{\mathcal{M}} \tag{13}$$

において局所的に唯一つである．

### 3.3.5 多倍長精度保証への期待

存在範囲 (12) は狭く，一意性範囲 (13) は広くという立場からは，残差 $\delta > 0$ をできるだけ小さく取り，$\mathcal{M} > 0$ は $\delta$ に比べて大きめに評価できることが望ましい．現在のところ，

4 倍精度区間演算により，ある程度の小さい $\delta$ の評価といくつかの $R, a$ における計算機援用証明に成功している．しかしながら，Orr-Sommerfeld 方程式は丸め誤差の影響を受けやすいことが知られており，より精緻な解の包み込みを達成するための多倍長精度保証環境の整備が期待される．

# 4 これまでの進捗状況と今後の展望

## 4.1 進捗状況

山本・松田は，3.1 節の C++クラスライブラリを設計し，四則演算および平方根の実装と理論的評価を与えた．区間演算を中心値・半径形式で実装するにおいては，演算方法によっては半径の拡大を引き起こすことがよく知られていたが，乗算・除算の計算において区間半径拡大が起きない手法を提案した．また，多倍長演算においては半径を低精度にすることによってメモリを節約でき，下端・上端型と比較して区間演算のコストが改善されることを確認した．

藤原は exflib の丸め制御技術を応用した区間演算の実装に取り組み，3.2 節に述べた Fortran 90 インターフェースを開発した．また，基本線形代数演算の精度保証付き数値計算環境の構築を進めた．さらに，丸め誤差の影響が深刻に現れる数値的に不安定な問題に exflib の区間演算を適用し，丸め誤差の増大の定量的評価および必要な計算桁数の見積が可能となることを示した．

渡部・木下は，3.3 節で述べた Orr-Sommerfeld 方程式に対する解の包み込み定理を導き，Legendre/Chebyshev 多項式基底展開による解の包含の過程と Orr-Sommerfeld 方程式に対する解の包み込みおよび複素固有値の除外では多倍長区間演算が必須となることを明らかにした．また，理論的な定式化と検証アルゴリズムを整備した．さらに，exflib 区間演算ライブラリを九州大学情報基盤研究開発センターの計算機システムに移植し具体的なプログラミングの実装段階に移行することができた．

また，山本・松田および藤原・渡部・木下による平成 23 年度の最新の研究成果を九州大学で開催された応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会において報告するとともに関係者による意見交換を行い，今後の研究の方向性を確認した．

このように，実問題への適用性を視野に入れた協調的・相補的な研究は，達成項目に沿って順調かつ着実に進行している．

## 4.2 今後の展望

平成 22, 23 年度の共同研究で得られた成果を踏まえ，以下を計画している．

1. 精度保証付き多倍長並列演算環境の九州大学情報基盤研究開発センターの研究用計算機システムにおける評価，複素数型への拡張，BLAS レベルの基本演算関数の作成，各種数学関数の設計・実装.
2. 連立 1 次方程式，固有値・特異値問題など精度保証付き線形計算ライブラリの整備
3. 丸め誤差累積の特質に着目し，利用者が指定した所望の誤差限界に対して自動的に保証された結果を返却する動的適応的システムの設計・開発
4. Legendre/Chebyshev 高次多項式の零点を含む区間を多倍長で求め，そのデータを利用した精度保証付き数値積分への応用
5. 反応拡散方程式系の精度保証，3 次元 Maxwell 方程式に関するスペクトル・ギャップの存在検証，Navier-Stokes 方程式の線形安定性理論から導かれる非自己共役固有値問題に対する計算機援用解析の遂行

# 5 研究成果リスト

(1) 学術論文

- 山本野人, 松田望: 精度保証付き多倍長演算の方法と構成, 計測と制御, Vol. 49, No. 5, pp. 297–302, 2010.
- Nozomu Matsuda, and Nobito Yamamoto: On the basic operations of interval multiple-precision arithmetic with center-radius form, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Special Section on Recent Progress in Verified Numerical Computations, Vol. 2, No. 1, pp. 54–67, January, 2011.
- Yoshitaka Watanabe, Kaori Nagatou, Michael Plum, and Mitsuhiro T. Nakao: A computer-assisted stability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, Special Section on Recent Progress in Verified Numerical Computations, Vol. 2, No. 1, pp. 123–127, January, 2011.
- Nobito Yamamoto, Mitsuhiro T. Nakao, and Yoshitaka Watanabe: A theorem for numerical verification on local uniqueness of solutions to fixed-point equations, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 32, No. 11, pp. 1190–1204, November, 2011.
- 藤原 宏志: PC・クラスタ向きの高速多倍長計算環境の構築と科学技術計算への応用，計算工学講演会論文集 Vol. 15 (2010-05) pp. 887–890, 2010.

(2) 国際会議プロシーディングス

- Hiroshi Fujiwara: Numerical real inversion of the Laplace transform by reproducing kernel and multiple-precision arithmetic, Proceedings of the 7th International ISAAC Congress (2010, Aug) pp.289–295.

(3) 国際会議発表

- Nobito Yamamoto, and Nozomu Matsuda: Interval multiple-precision arithmetic with center-radius form, 14th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2010), ENS de Lyon, France, 2010 September.
- Hiroshi Fujiwara: Multiple-precision interval arithmetic and their applications, The Third China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics Gangneung-Wonju National University, Gangneung, 2010 August.
- Yoshitaka Watanabe: Computer-assisted existence proofs with local uniqueness for the Orr-Sommerfeld problem, International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2010 (INVA2010), Hotel Lido Azzurro, Hachijyo Island, Tokyo, Japan, 2010 March.
- Yoshitaka Watanabe: A self-validating norm computation of inverse for infinite dimensional linear operators and its applications, 14th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2010), ENS de Lyon, France [invited talk], 2010 September.
- Hiroshi Fujiwara: Direct treatment of numerical instability of inverse Laplace transforms using multiple-precision arithmetic, Laplace Transform Methods and Thier Applications, National Institute for Mathematical Science, Daejeon, Korea [invited talk], 2011 September 4.

- Hiroshi Fujiwara: Remarks on numerical instability of complex inverse Laplace Transforms using multiple-precision arithmetic, The 7th EASIAM Conference 2011, Waseda University Kitakyushu Campus, 2011 June 29.

- Yoshitaka Watanabe: Computer-assisted proof for functional equations based on infinite dimensional sequential iteration, Japanese-German Workshop on Computer-Assisted Proofs and Verification Methods, Karlsruhe Institute of Technology, Germany, September 18-22, 2011.

(4) 国内会議発表

- 山本 野人, 松田 望: 精度保証付き多倍長演算の実装について, 日本応用数理学会 2010 年度年会, 明治大学, 2010 年 9 月.

- 山本 野人, 松田 望: 中心半径型区間多倍長演算について, 研究集会・科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 10 月.

- 藤原 宏志: 多倍長区間精度による数値的に不安定な問題の取り扱い, 研究集会・科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 10 月.

- 渡部 善隆, 木下 武彦: Legendre 多項式を用いた高精度品質保証—およびその課題—, 日本応用数理学会 2010 年研究部会連合発表会, 筑波大学，2010 年 3 月.

- 渡部 善隆, 長藤 かおり, 中尾 充宏: 非自己共役作用素に対する固有値の除外法, 日本応用数理学会 2010 年度年会 [特別講演], 明治大学, 2010 年 9 月.

- 渡部 善隆, 長藤 かおり, Michael Plum, 中尾 充宏: 無限次元固有値問題に対する固有値の非存在証明, 研究集会・数値解析と数値計算アルゴリズムの最近の展開, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1719 (2010) pp.118-129.

- 渡部 善隆: 無限次元固有値問題に対する固有値の除外法, 研究集会: 数値解析と計算の信頼性評価, 佐世保市, 2010 年 11 月.

- Shuting Cai, 長藤 かおり, 渡部 善隆: An enclosure method for solutions of FitzHugh-Nagumo equation, 応用数学合同研究集会報告集 pp.197-198, 龍谷大学, 2010 年 12 月.

- 渡部 善隆: 微分方程式の精度保証付き数値計算, 研究集会: 可積分系数理の進化, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 8 月.

- 渡部 善隆: 逐次反復に基づく関数方程式の計算機援用証明, 日本応用数理学会 2011 年度年会講演予稿集, pp.341-342, 同志社大学, 2011 年 9 月.

- 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏: 線形楕円型偏微分作用素の逆作用素に対する高精度な事後評価について, 日本応用数理学会 2011 年度年会講演予稿集, pp.345-346, 同志社大学, 2011 年 9 月.

- 木下 武彦，渡部 善隆，中尾 充宏: 線形楕円型偏微分作用素の逆作用素に対する事後誤差評価について, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 142-145, 信州大学，2011 年 10 月.

- 渡部 善隆，木下 武彦, 中尾 充宏: Orr-Sommerfeld 方程式に対する局所一意性付き計算機援用証明, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 146-147, 信州大学，2011 年 10 月.

- 渡部 善隆: 逐次反復に基づく関数方程式の精度保証付き数値計算, 研究集会: 科学計算の信頼性とその周辺に関するワークショップ, 佐世保市, 2010 年 11 月.

- 松田 望: 精度保証付き多倍長演算の新手法, 多倍長精度計算フォーラム・第 2 回研究会, 工学院大学, 2011 年 12 月.
- 松田 望: 中心値・半径方式による精度保証付き多倍長区間演算, 日本応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会, 九州大学, 2012 年 3 月.
- 渡部 善隆, 藤原 宏志: exflib における多倍長区間演算 Fortran インターフェースとその応用, 日本応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会, 九州大学, 2012 年 3 月.

(5) その他（特許，プレス発表，著書等）

- 中尾 充宏, 渡部 善隆: 実例で学ぶ精度保証付き数値計算〜理論と実装〜, 臨時別冊・数理科学 2011 年 10 月 (SGC ライブラリ 85), サイエンス社, 2011 年 10 月, JAN:4910054701012, B5 判, 216 頁.