

[jh260076] ヘテロカオスに対するリザーバーコンピューティングと数理構造解析

齊木 吉隆 (一橋大学)

1 導入

リザーバーコンピューティングは時系列データから時間発展モデルを構成する機械学習手法の一つで、流体マクロ変数や気象変数などのカオス力学系の時系列予測に有効である [1, 2, 3, 4, 5, 7]。

リザーバーコンピューティングを用いたデータ駆動型モデルが、元の系の力学的性質をどの程度捉えることができるのかを明らかにする必要がある。Lu ら [3] は、適切なパラメータ選択のもとで、データ駆動型モデルが元の系と類似したアトラクターを有することを報告した。背後にある力学系の不動点や周期軌道や正のリアプノフ指数などが機械学習により学習可能であることや、機械学習モデルの数理構造を明らかにしている [6]。

本研究では気象や流体といった実際の現象でよくみられる不安定次元がスイッチする構造がどの程度再現できるかを数学的視点で解析を行う。この解析は、学習した時系列データの背後にある力学系構造をどの程度正確に捉えているのかを明らかにするものである。

2 リザーバーコンピューティング

リザーバーコンピューティングとは

- 時系列データから時間発展モデルを構成する機械学習手法
- 比較的高次元のランダムなニューラルネットワークであり、出力層のみデータから決定される
- ローレンツ方程式や Kuramoto-Sivashinsky 方程式などの力学系の時系列予測に成功 [1, 2, 3]

2.1 学習のプロセス

○ 学習のプロセス 1 (リザーバーベクトルへの変換)

関数 \tanh を用いて入力データ \mathbf{u} をリザーバー状態ベクトル $\mathbf{r}(t)$ に変換:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = (1 - \alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{in}\mathbf{u}(t) + \xi\mathbf{1}).$$

$\mathbf{A}, \mathbf{W}_{in}$: 疎なランダム行列で、 \mathbf{A} は最大固有値が制御される

○ 学習のプロセス 2 (出力層の学習)

出力層の行列 \mathbf{W}_{out} は次を満たすように定める

$$t^V < T \quad \mathbf{W}_{out}\mathbf{r}(t + \Delta t) \approx \mathbf{u}(t + \Delta t).$$

⇒ 次の式の最小化問題の解を求める:

$$\sum_{l=1}^L \|(\mathbf{W}_{out}\mathbf{r}(l\Delta t)) - \mathbf{u}(l\Delta t)\|^2 + \beta[\text{Tr}(\mathbf{W}_{out}\mathbf{W}_{out}^T)].$$

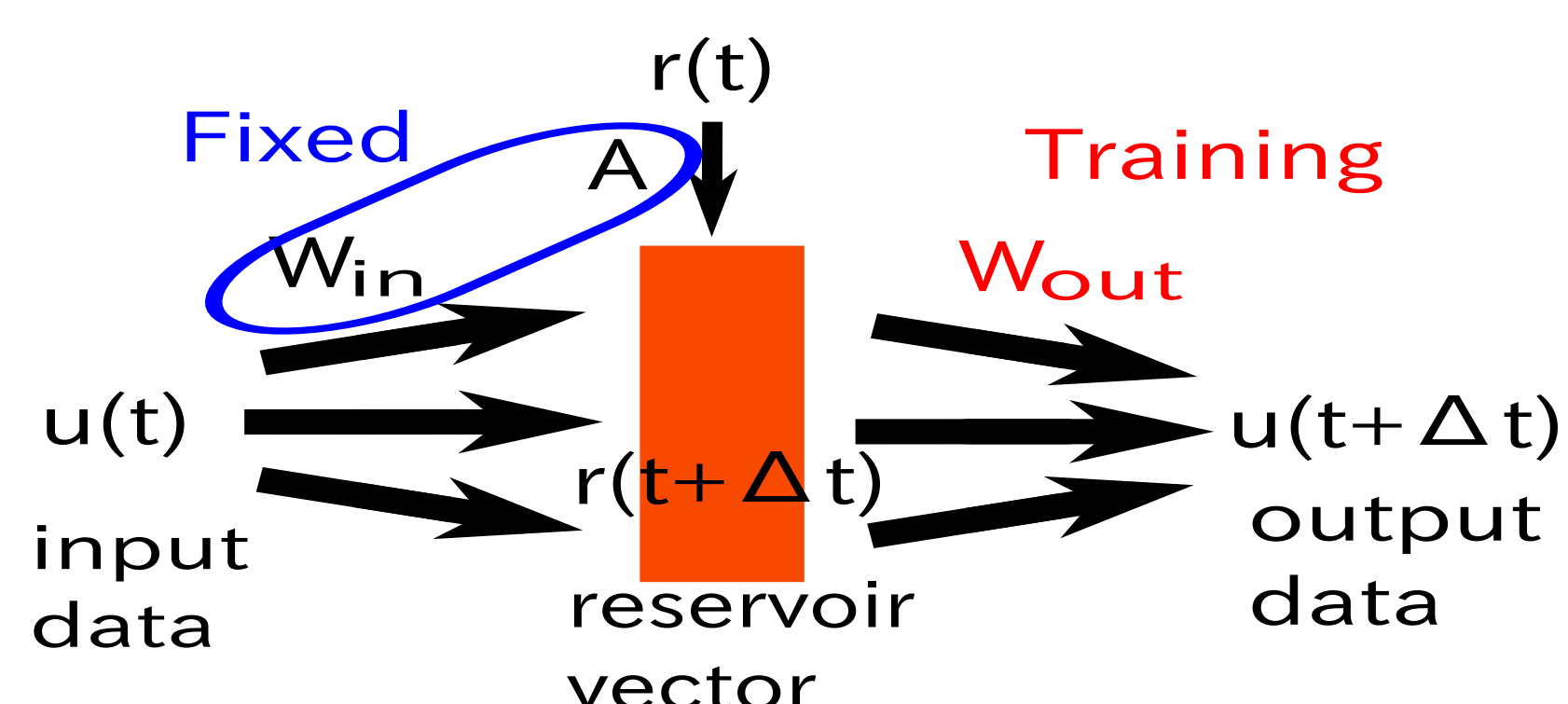


Figure 1: リザーバーコンピューティングのスケッチ (学習時)

2.2 予測のプロセス

学習により得た行列 \mathbf{W}_{out}^* を用いて、変数 \mathbf{u} の時系列データを得る:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{W}_{out}^*\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{r}(t + \Delta t) &= (1 - \alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{in}\hat{\mathbf{u}}(t) + \xi\mathbf{1}). \end{aligned}$$

このリザーバーモデルが変数 \mathbf{u} のデータ駆動型モデルである。

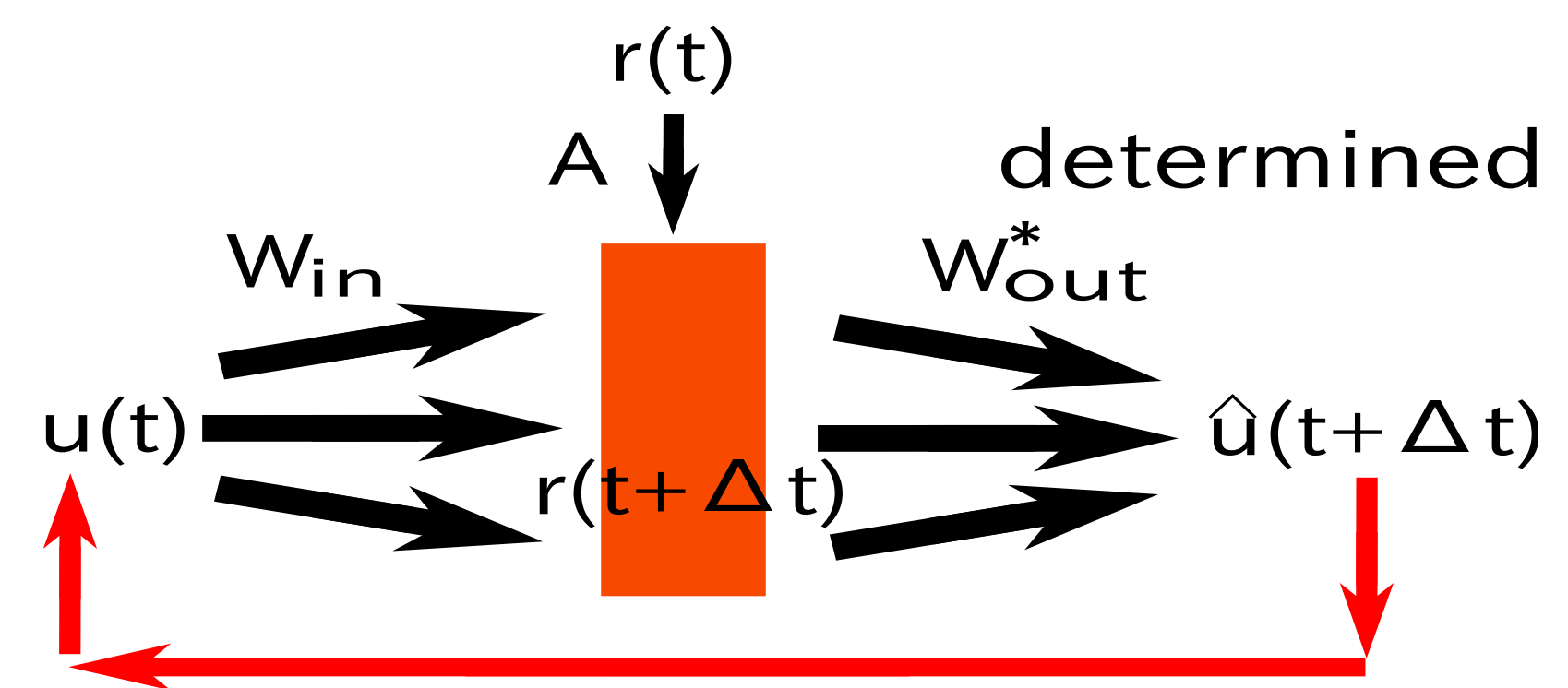


Figure 2: リザーバーコンピューティングのスケッチ (予測時)

3 研究内容

本研究では、まずヘテロカオス性をもつ力学系の時系列データから機械学習モデルを構成し、時系列の予測可能性を力学系の視点から確認し、ヘテロカオス性を再現するかを明らかにする。まずは、ヘテロカオスの特徴である誤差の拡大方向の数が増減するところで時系列予測の誤差が急激に増加する様子が見られるか否かに注目して時系列予測の性能を考察する (図 3)。

$$\begin{cases} X_{n+1} = a_1 X_n(1 - X_n) + \omega\{a_2 Y_n(1 - Y_n) - a_1 X_n(1 - X_n)\} \\ Y_{n+1} = a_2 Y_n(1 - Y_n) + \omega\{a_1 X_n(1 - X_n) - a_2 Y_n(1 - Y_n)\}. \end{cases} \quad (1)$$

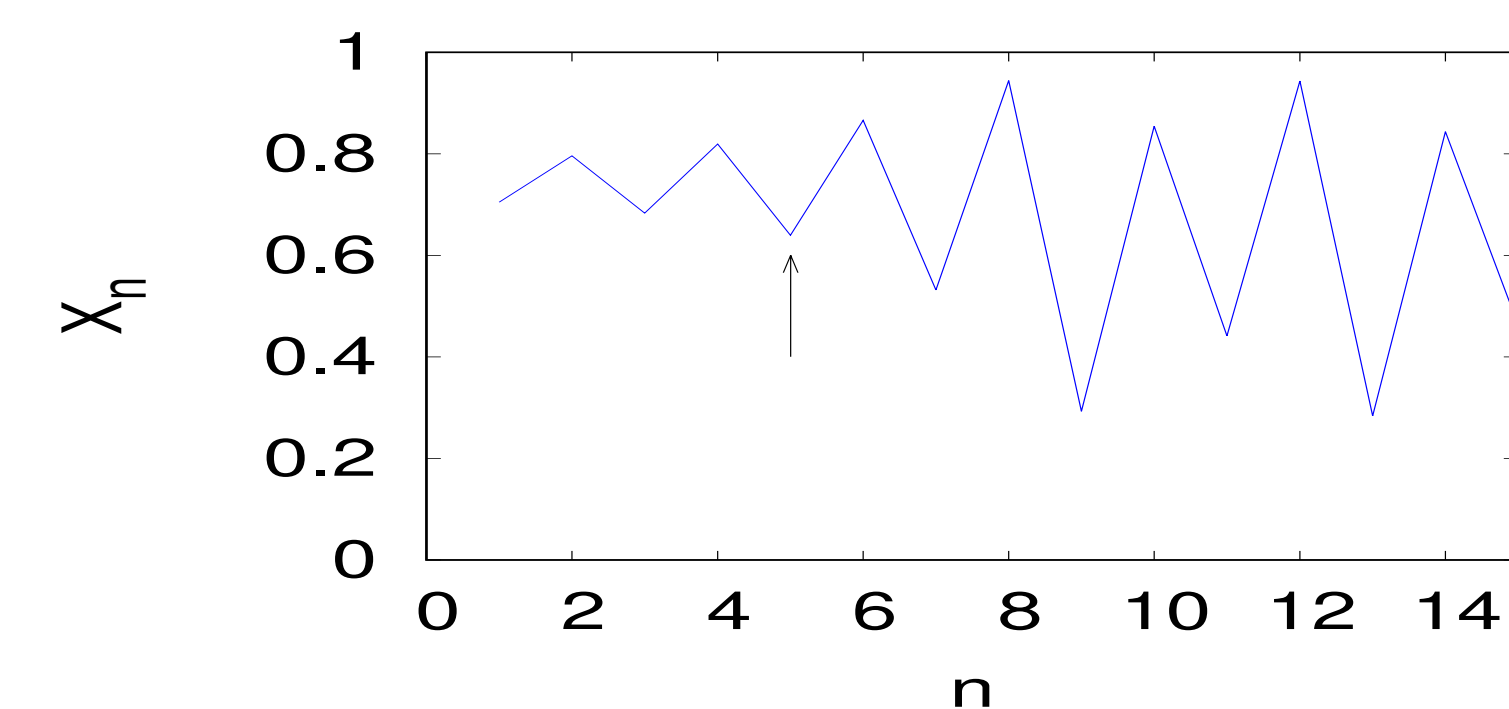


Figure 3: 写像 (1) の時間発展の様子で、矢印で示した時刻 5 のところで不安定次元が 2 から 1 に変化している。

また、以下のことなども研究する。

- 異なる不安定次元の不変部分集合の再現性
- 長時間発展させた場合の有限時間リアプノフ指数の分布の再現性
- 高次元ニューラルネットワークの空間上での力学系の再現性 (cf 図 4)

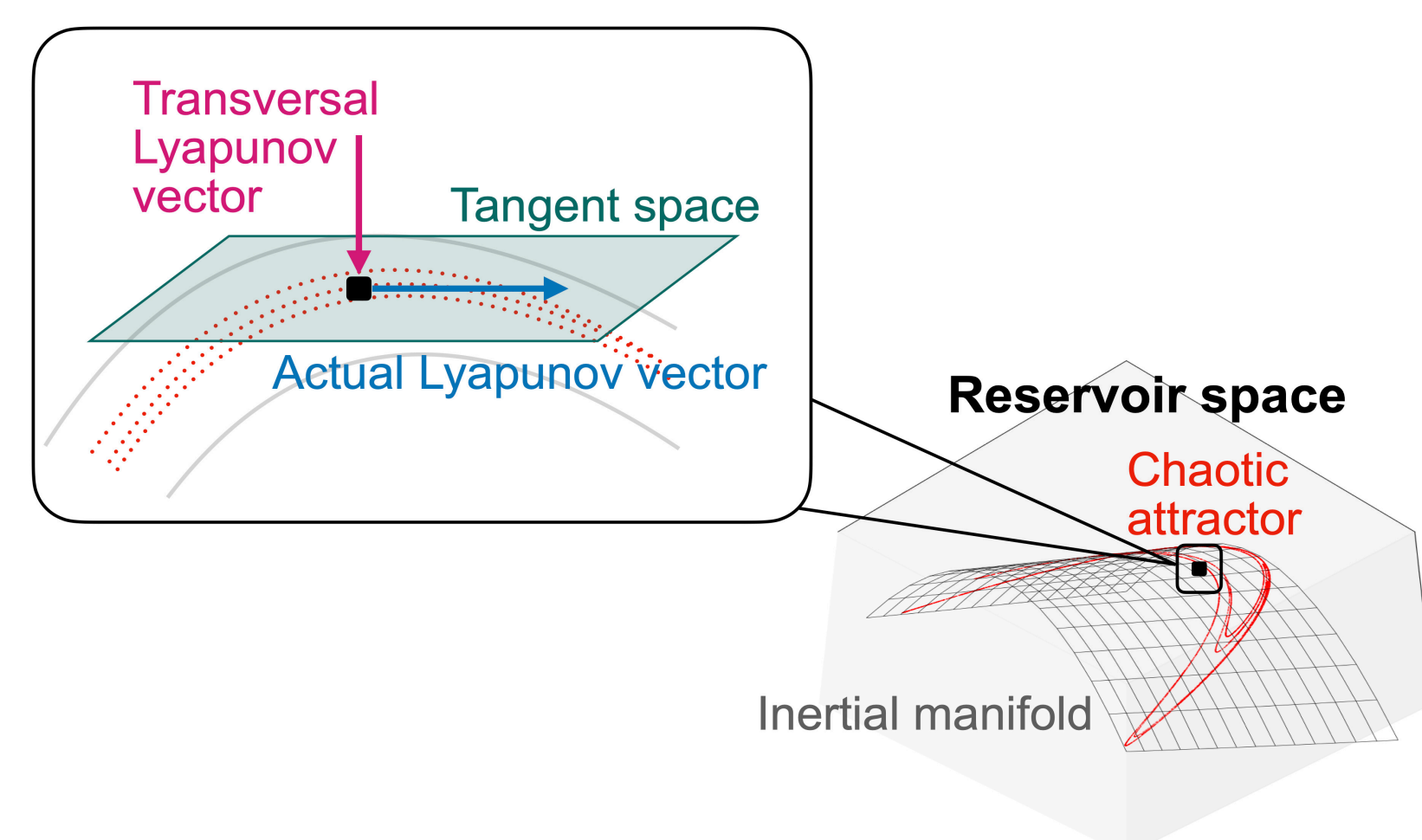


Figure 4: 高次元ニューラルネットワークの空間上での力学系の様子 ([8] の図 5 を引用)

Reference

- [1] J. Pathak, Z. Lu, B. Hunt, M. Girvan, and E. Ott, Chaos 27, 121102 (2017).
- [2] J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, Z. Lu, and E. Ott, Physical Review Letters 120, 024102 (2018).
- [3] Z. Lu, B. R. Hunt, and E. Ott, Chaos 28, 061104 (2018).
- [4] K. Nakai and Y. Saiki, Physical Review E 98, 023111 (2018).
- [5] K. Nakai and Y. Saiki, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S 14, 3641079 (2021).
- [6] M. U. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki and N. Tsutsumi, Physical Review E 104 (4), 044215 (2021).
- [7] T. Jinno, T. Mitsui, K. Nakai, Y. Saiki and T. Yoneda, Chaos 35, 053149 (2025).
- [8] M. U. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki and N. Tsutsumi, Chaos 36, 053115 (2026).