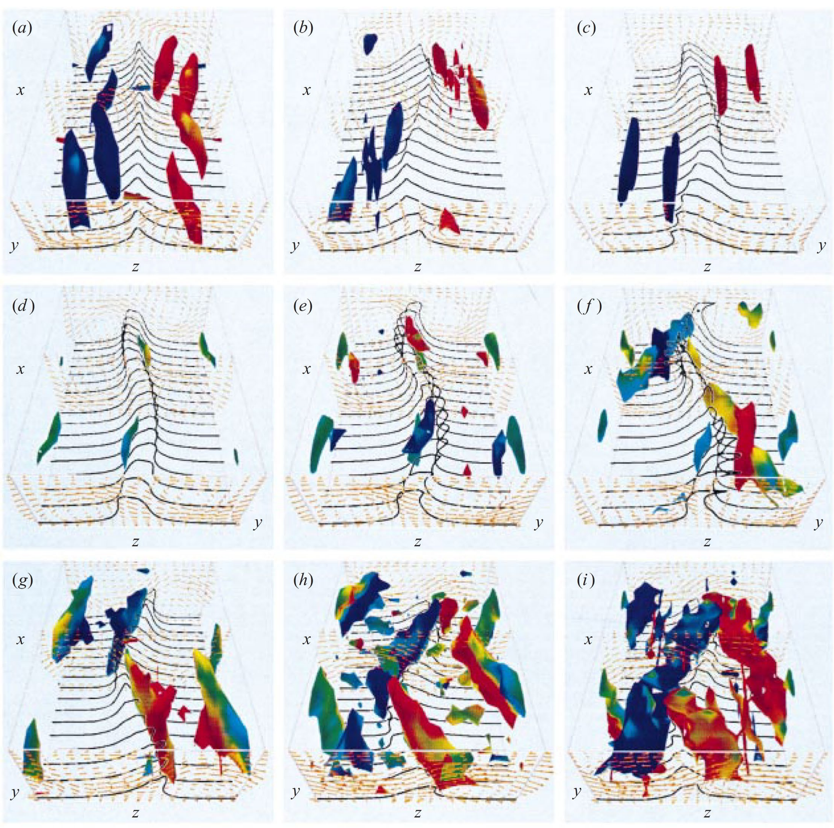
カーネル分類器による相空間断面の構成

秋田大学 佐々木英一
jh260037

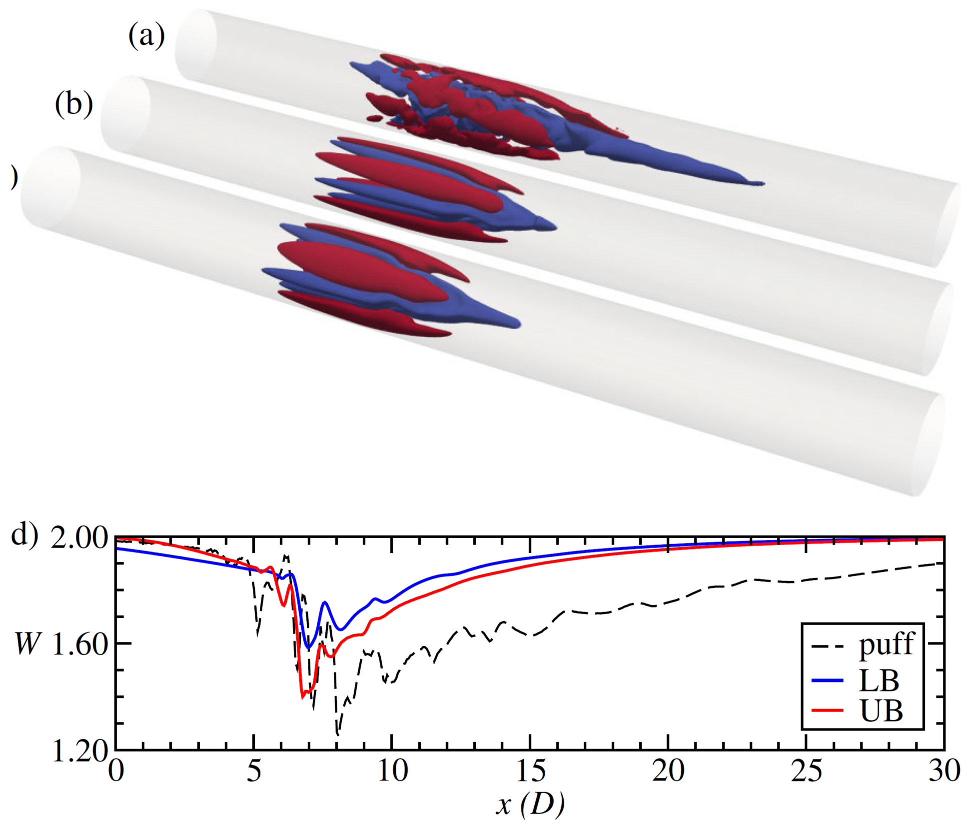
力学系理論によれば，カオスアトラクタは自己相似構造をもち，そのすきまに多数の定常解・周期解が存在する．本研究は大自由度散逸力学系の典型例である発達乱流について，アトラクタの相空間構造を体系的に記述することを目的とする．エネルギー散逸の時空間ゆらぎに基づく分類問題を定式化し，相空間上にエネルギーの平衡境界を構成する．

力学系理論と乱流解析

Kawahara & Kida (2001)[1]
ミニマル乱流を記述する周期解



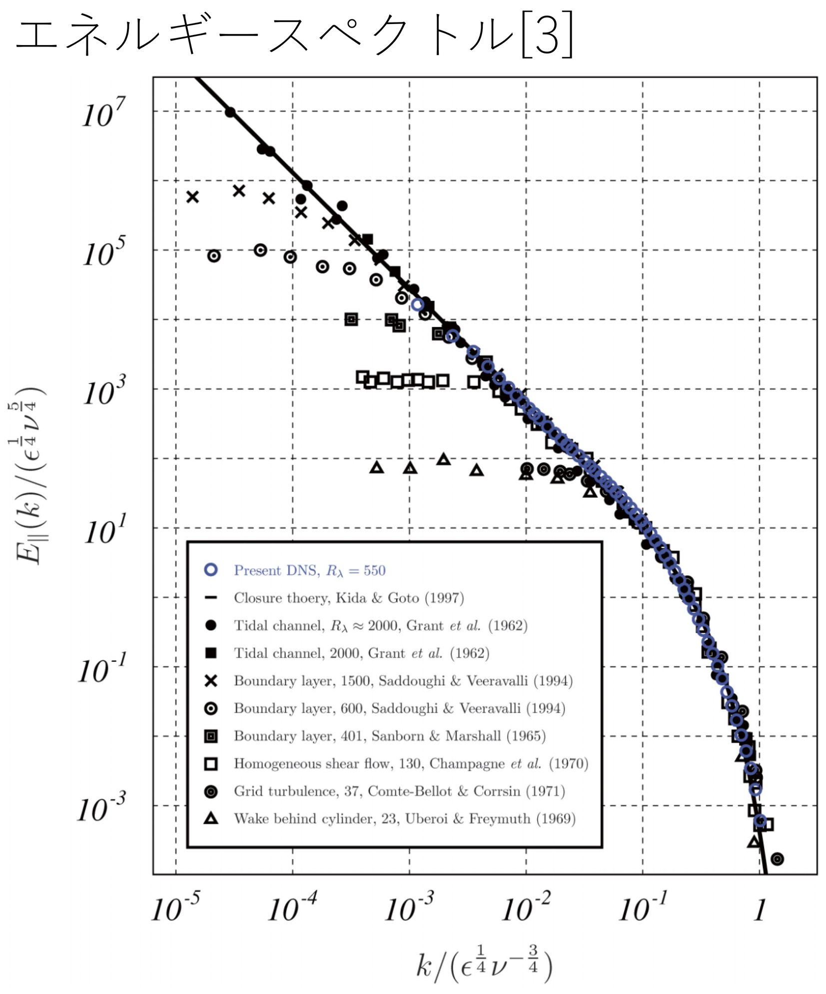
Avila et al. (2013)[2]
乱流パフを特徴づける周期解



発達乱流は？

乱流理論と非定常性

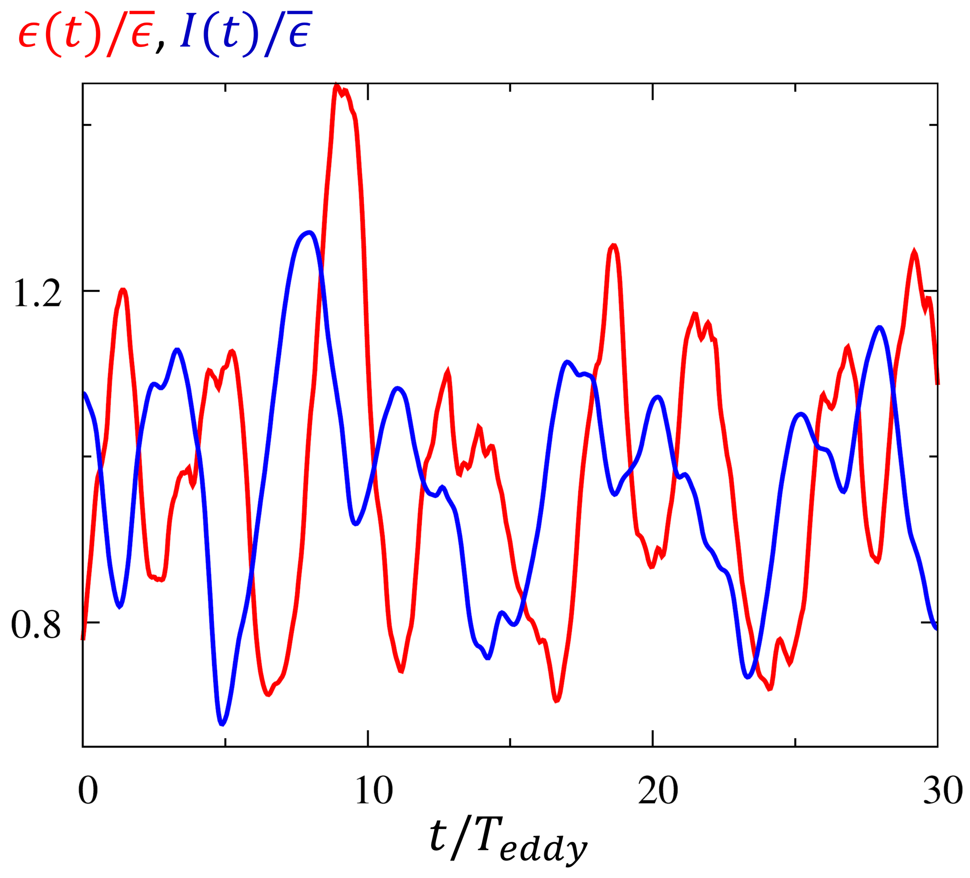
エネルギースペクトル[3]



平均エネルギー散逸率$\bar{\epsilon}$と粘性率νによって決定される．

散逸率・注入率の時間変化

$\epsilon(t)/\bar{\epsilon}$, $I(t)/\bar{\epsilon}$



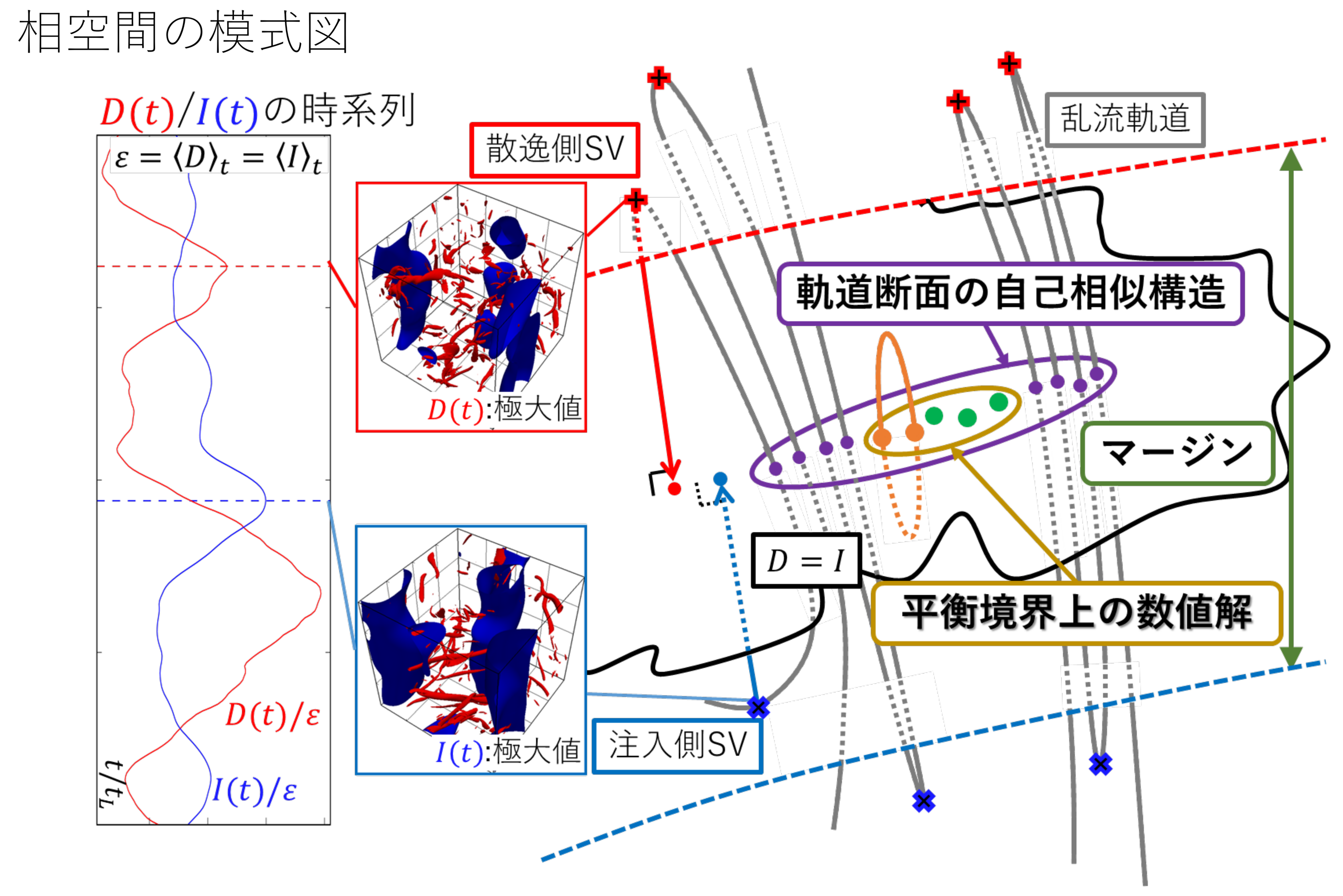
エネルギー散逸率と注入率が最大となる時刻が異なる[4]．

乱流アトラクタ上の解軌道が小スケール優位と大スケール有意な状態を往来することを示唆．

研究の興味

エネルギー散逸率・注入率の極大値を用いて，分類器を構成し，分類境界上の解軌道の往来断面を調べる．

相空間の模式図



＊分類境界上では小スケールの運動も大スケールの運動もどちらも有意ではない状態が実現すると予想．
＊この境界上でϵ, Iが釣り合えば，

$$I - \epsilon = \frac{dE}{dt} \simeq 0$$

エネルギー収支が釣合う状態変数集合上に定常解・周期解は存在．

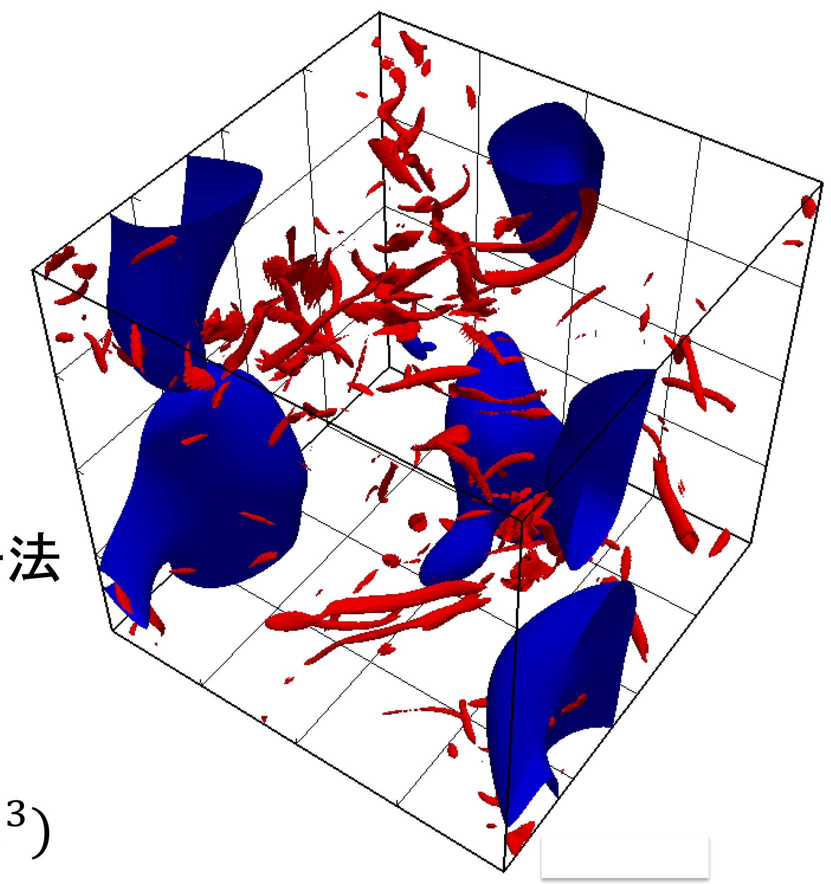
問題設定

3次元トーラス上のKolmogorov流

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} + \vec{F}$$

$$\vec{F} = F_0 \sin x_2 \vec{e}_1$$



4次の古典的Runge-Kutta法＋積分因子法
2/3則によるエイリアジング除去

調べるパラメータ
$R_\lambda \simeq 80, 120, 300 (N = 64^3, 256^3, 512^3)$

分類器の構成

状態変数$\vec{x}_n$と対応するラベル$y_n \in \{-1, +1\}$による訓練集合

$$T = \{(\vec{x}_1, y_1), \cdots (\vec{x}_N, y_N)\}$$

を用いて分類器

$$\hat{y} = \mathrm{sign} f(\vec{x}), \qquad \hat{y} \in \{-1, +1\}$$

となる決定関数fを求める．

カーネル法

関数$\phi(\vec{x})$による特徴抽出

$$f(\vec{x}) = \sum_n \alpha_n k(\vec{x}_n, \vec{x}) + b$$

ガウスカーネル: $k(\vec{x}, \vec{y}) = (\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})) = \exp(-\gamma \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$

2乗誤差損失+elastic net

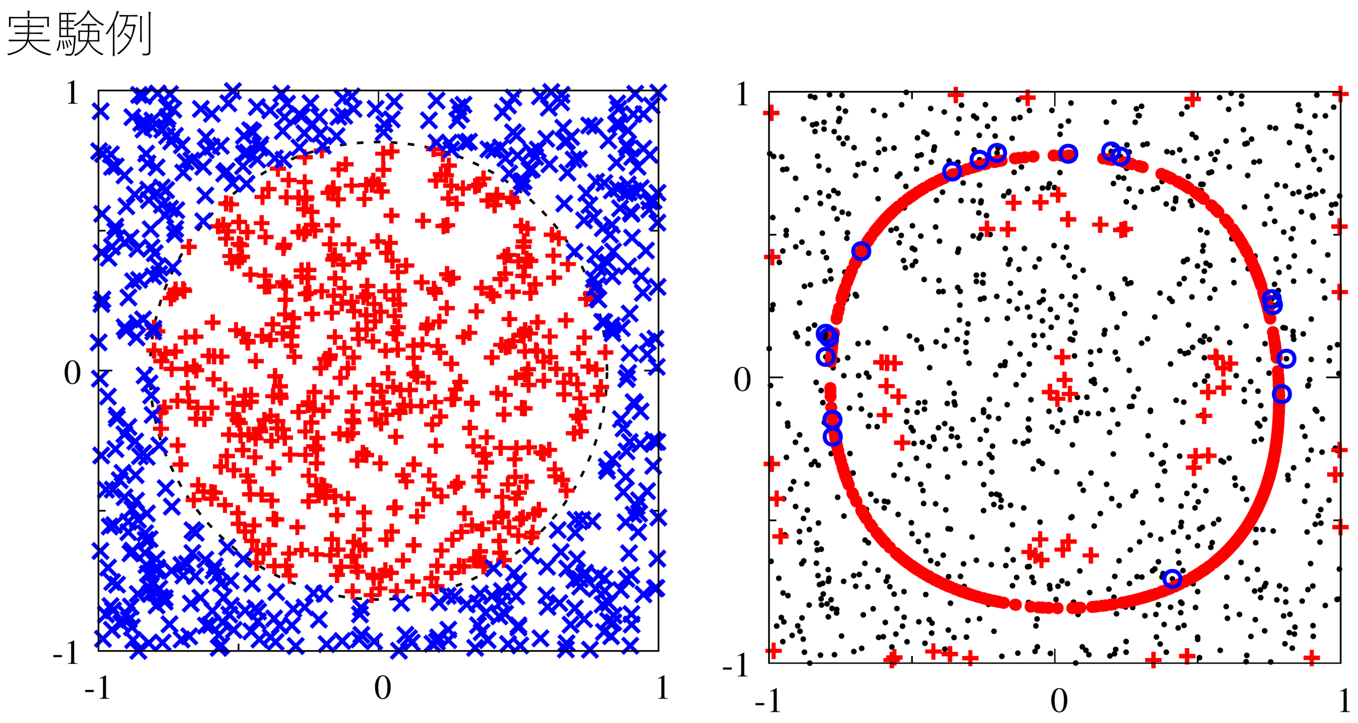
$$J(\vec{\alpha}, b) = \frac{1}{2}\left\|\vec{y} - K\vec{\alpha} - b\vec{1}\right\|^2 + \lambda_1 \|\vec{\alpha}\|_1 + \frac{\lambda_2}{2}\vec{\alpha}^T K \vec{\alpha}$$

Gram行列: $K_{ij} = k(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$

＊交互方向乗数法(ADMM)と共役勾配法を組み合わせて解く．
＊分類境界はサンプル間の2分法で$f = 0$となる状態変数を求める．

L1正則化によるスパースなカーネル分類器の性質

実験例



＊kernel trickにより，状態変数を保持しなくてよい．
＊少ないサポートベクトルで分類器を構成できる．
＊サポートベクトルは分類境界から離れた点が選ばれがち．

進捗状況

✓カーネル法による分類器構成アルゴリズム
✓hinge損失+perceptronモデル(より低コストで計算する場合)
✓訓練集合の生成
✓Schmidt-Lyapunov解析:
　$R_\lambda \simeq 80$の乱流アトラクタのLyapunov次元は約1620．

[1]Kawahara & Kida: J. Fluid Mech., 449, 291-300 (2001)
[2]Avila et al.: Phys. Rev. Lett., 110, 224502 (2013)
[3]Goto: Prog. Theo. Phys. Supp. 195, 139-156 (2012)
[4]Goto & Vassillicos: Fluid, Dyn. Res. 48, 021402 (2016)