学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 公募型共同研究 平成23年度採択課題

3rd Symposium

Joint Usage / Research Center for Interdisciplinary Large-scale Information Infrastructures

11-NA14

坂下 達哉(電気通信大学 情報システム学研究科)

量子i.i.d.状態のシミュレーション

研究目的

・量子i.i.d.状態に関する極限式は重要である.
・開発した計算システムを新しい数学的予想に活用する.

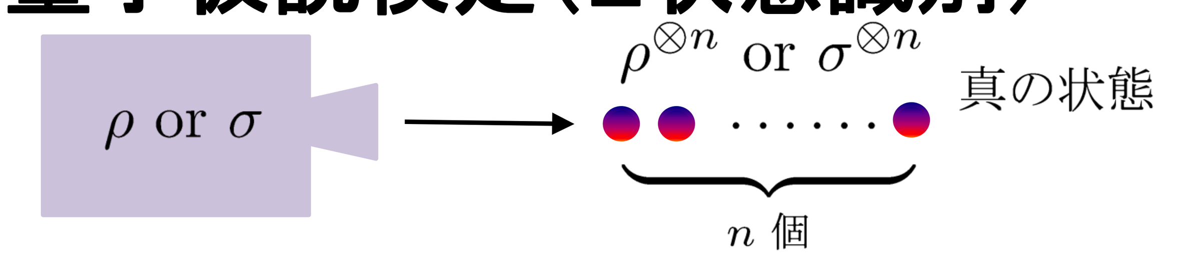
量子 i.i.d. 状態

数学的：n 個のテンソル積 $\rho^{\otimes n} = \underbrace{\rho \otimes \cdots \otimes \rho}_{n\text{ 個}}$

物理的：各 ρ の間に相関がない

古典確率論 :データ数 n の独立同一分布（i.i.d.）に相当する

量子仮説検定(2状態識別)



測定 $\{M^n(0), M^n(1)\}$

測定者が決めておく　測定値が $0(1)$

↓

$\rho^{\otimes n}(\sigma^{\otimes n})$ が真の状態であったと判定

真の状態	測定値	判定	正・誤
$\rho^{\otimes n}$	0	$\rho^{\otimes n}$	正しい
	1	$\sigma^{\otimes n}$	第１種誤り
$\sigma^{\otimes n}$	0	$\rho^{\otimes n}$	第２種誤り
	1	$\sigma^{\otimes n}$	正しい

誤り確率（Neyman-Pearson 検定を採用した場合）

$\alpha_n(a) := \mathrm{Tr}[\rho^{\otimes n}\{\rho^{\otimes n} - e^{na}\sigma^{\otimes n} \leq 0\}]$:第１種誤り確率

$\beta_n(a) := \mathrm{Tr}[\sigma^{\otimes n}\{\rho^{\otimes n} - e^{na}\sigma^{\otimes n} > 0\}]$:第２種誤り確率

ここで，$a \in \mathbb{R}$ は $\rho^{\otimes n}$ と $\sigma^{\otimes n}$ のどちらに肩入れして判定するかを決めるパラメータ

A: エルミート行列　　$d := \dim A$

$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$: A の固有値　$\{\psi_1, \ldots, \psi_d\}$: A の固有ベクトル

$\{A > 0\} := \sum_{i:\lambda_i > 0} \psi_i \psi_i^*$　（ここで，$*$ は共役転置）

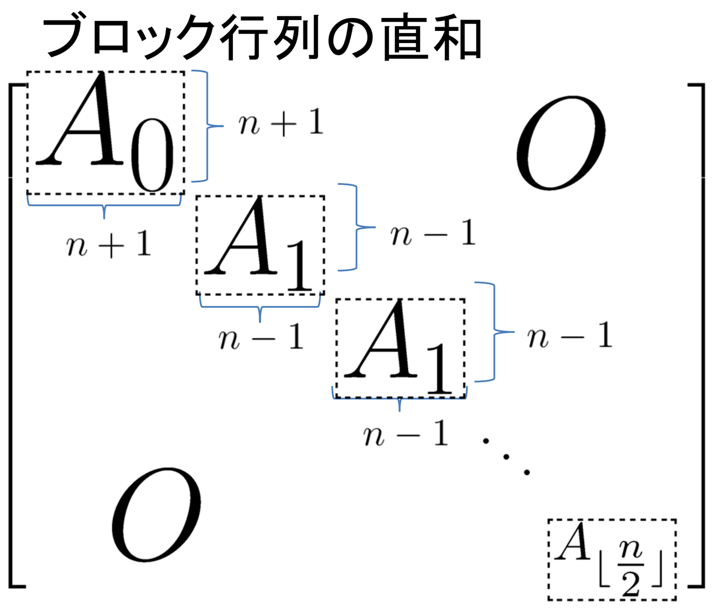
つまり，A の正固有値に対応する固有ベクトル空間の直和への射影

$A^{\otimes n}$ の既約分解（ブロック対角化）

A：2×2 の行列

ブロック行列の直和

$A^{\otimes n} \xrightarrow{\text{基底変換}}$



A_k：既約成分　　$\dim A_k = n + 1 - 2k$

同じ A_k は $m_k := {}_nC_k - {}_nC_{k-1}$ 個 (重複度)

指数サイズ ⟶ 多項式サイズの行列（重複あり）

ステップ 1. 各 k について，以下を行う．

(a) 既約成分 $\{\rho_k\}$ と $\{\sigma_k\}$ を計算する．

(b) 行列 $\rho_k - e^{na}\sigma_k$ の固有値 $\{\lambda_{n,k,i}\}_i$ と正規直交化された固有ベクトル $\{v_{n,k,i}\}_i$ を求める．

(c) $\beta_{n,k}(a) = \sum_{\lambda_{n,k,i} > 0} v^*_{n,k,i}\sigma_k v_{n,k,i}$ を求める．

ステップ 2. $\beta_n(a) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} m_k \beta_{n,k}(a)$ を求める．

図 1: $\beta_n(a)$ の計算手順

固有値解法に対する要求

- 全固有値，全固有ベクトルが必要
- Z_k は固有値が指数的にばらついた数値誤差が生じやすい行列

⟶ 精度は多倍長で補い，高速化のため QR 法を使う．

数学的予想の数値的検証

以下では，a をテンソル次数 n に依存した量とする：

$a := -D(\sigma\|\rho) - y/\sqrt{n}$　($y \in \mathbb{R}$：新しいパラメータ)

ここで，　$D(\sigma\|\rho) := \mathrm{Tr}[\sigma(\log\sigma - \log\rho)]$

量子相対エントロピー

このとき，$\beta_n(a)$ は

$\gamma_n(y) := \mathrm{Tr}[\sigma^{\otimes n}\{\rho^{\otimes n} - \exp[-n(D(\sigma\|\rho) + \frac{y}{\sqrt{n}})]\sigma^{\otimes n} > 0\}]$

と表される．

$n \to \infty$ のときの $\gamma_n(y)$ の振る舞いを知りたい．

予想　(中心極限定理のある量子版)

$\gamma_n(y) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y/s} \exp(-\frac{\alpha^2}{2})d\alpha =: \gamma(y)$　　$(n \to \infty)$

ここで，　$s^2 = \mathrm{Tr}[\sigma(\log\sigma - \log\rho - D(\sigma\|\rho)I)^2]$

数値計算で検証してみる

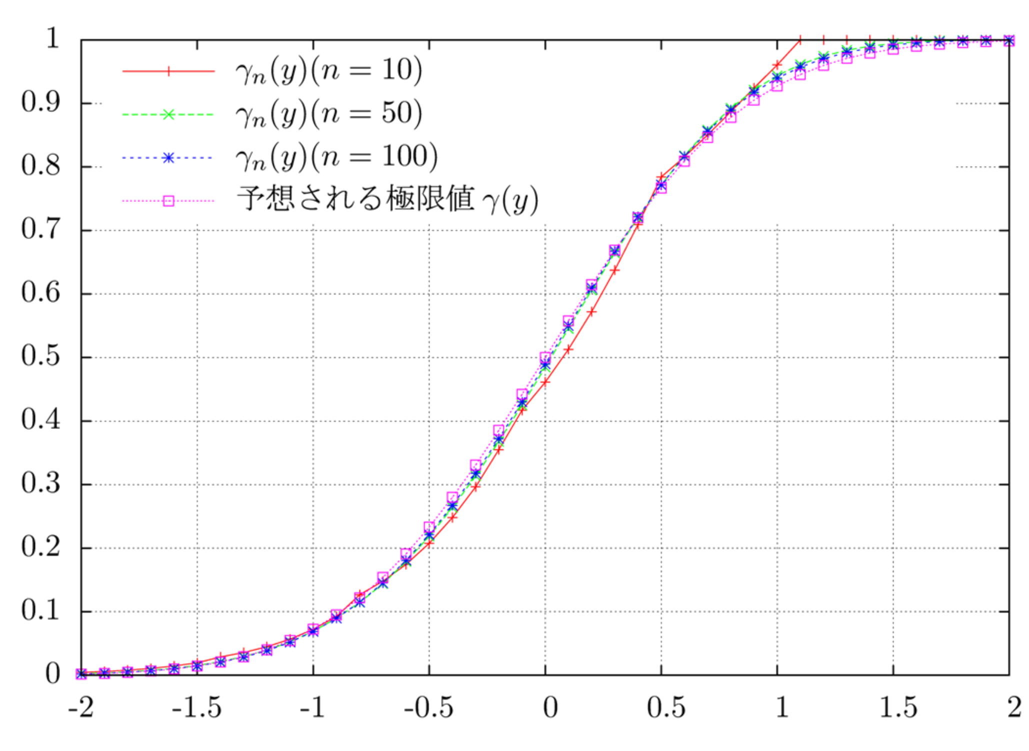


図 14: $\gamma_n(y)$ と 予想される極限値 $\gamma(y)$

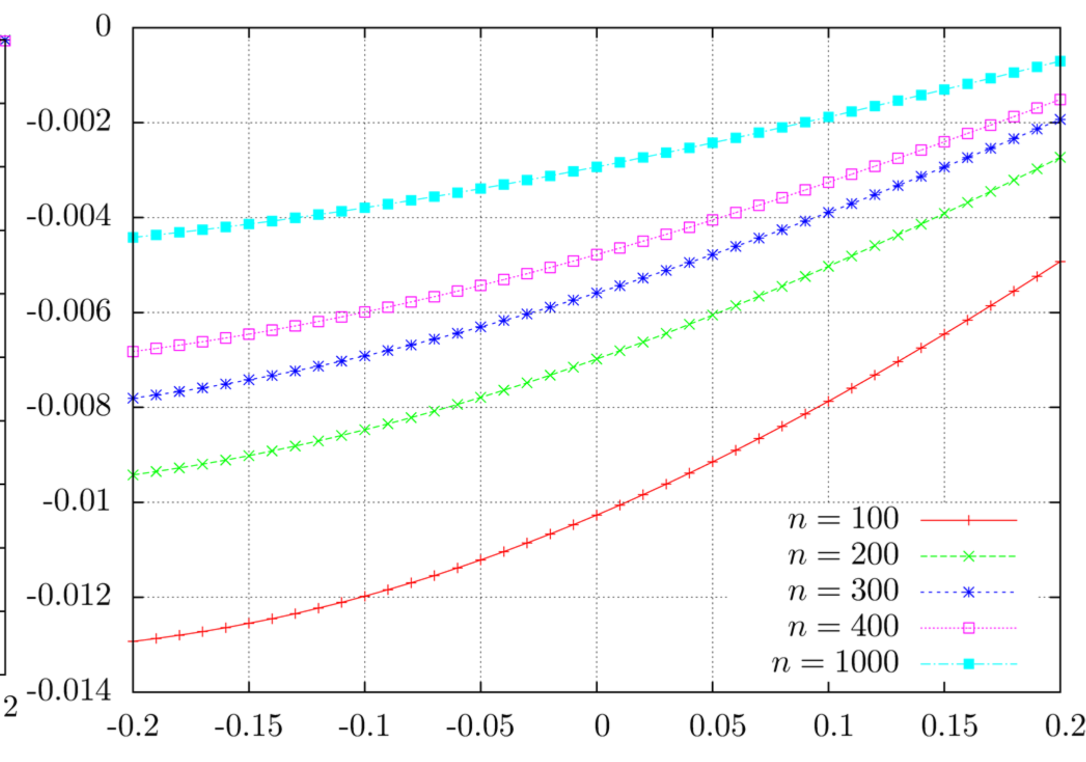


図 15: 差 $\gamma_n(y) - \gamma(y)$

⟶ 予想は成り立っているように見える．

今後の課題

1. Householder QR法のうち，三重対角化の占める時間が多い.
   ・三重対角化の単体高速化・スレッド並列化
2. 不要な既約成分についての計算を省略する工夫
3. 3×3行列以上への拡張
4. 量子推定など他の問題への応用