山本 野人（電気通信大学）

精度保証付き多倍長並列演算環境の構築と計算機援用解析への展開

1. 目的

既存のものより高速でメモリ効率が良く使いやすい精度保証付き多倍長並列演算ライブラリを作成し，数学的未解決問題に対する計算機援用証明への応用を目指す．

2. 区間演算

精度保証付き数値計算は「区間演算＋丸めの方向制御」によって実現される．区間変数および演算を中心値・半径形式で実装する．乗算・除算・平方根の計算には工夫が必要であり，演算の方法によっては半径拡大に注意が必要である一方で，特に多倍長演算の場合，半径を低精度にすることによってメモリを節約でき，計算速度も速くなる．また複素数への拡張も可能である．（右:除算の実装例）

$$\begin{aligned}\langle c,\ r\rangle &= [c-r,\ c+r]\\ &= \{x \mid c-r \le x \le c+r\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\langle c,\ r\rangle} &= \frac{\langle c,\ r\rangle}{c^2-r^2}\\ w &\equiv c^2-r^2 = z+\varepsilon_1\\ \bar{z} &\approx 1/z\\ z\bar{z} &= 1+\varepsilon_2\\ \delta &\equiv \frac{1}{w}-\bar{z}\\ &= -\frac{(z+\varepsilon_1)\varepsilon_2+\varepsilon_1}{z(z+\varepsilon_1)}\end{aligned}$$

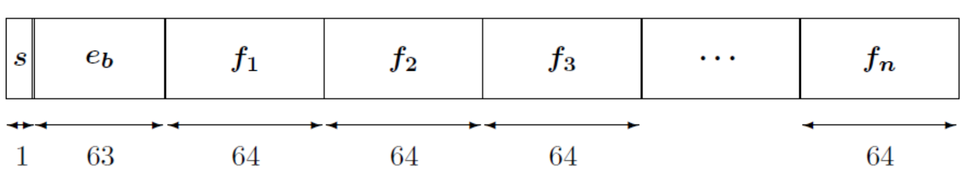
3. 精度保証付きライブラリ

correct rounding 機能を持つ高速多倍長計算環境 exflib に C++ による多倍長実数クラスおよび精度保証付き多倍長区間クラス を実装する．区間値は整数の中心値・半径形式で保持し，多倍長演算の精度が任意に設定可能である．多倍長クラスはプログラム上，通常の「数」と同じように扱うことができる．現在までに，加減算・乗算・除算・平方根に対する実装と理論的評価を与えた．また，特に丸め誤差の影響が深刻に現れる数値的に不安定な問題にexflibの区間演算を適用し，丸め誤差の増大の定量的評価および必要な計算桁数の見積が可能となることを示した．

```
typedef unsigned long uint32;

class LongFloat{
  int sign;
  uint32 *mantissa;
  int exponent;
};

class Radius{
  uint32 mantissa;
  int exponent;
};

class LongInterval{
  LongFloat center;
  Radius radius;
};
```

4. Exflib

多倍長数を64ビット整数の配列で表現し，四則演算と丸め制御を実装する．多倍長数の精度は可変長，上限は約2万桁(10進)．四則演算はアセンブリ言語によるインストラクション・レベル並列．連立方程式ソルバは MPI によるプロセス・レベル並列．スーパースカラからクラスタまで並列計算機構を利用する．



$$(-1)^s \times 2^e \times \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{2^{64i}}\right)$$

5. 参考文献

・Nozomu Matsuda, and Nobito Yamamoto: On the basic operations of interval multiple-precision arithmetic with center-radius form, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Special Section on Recent Progress in Verified Numerical Computations, Vol.2, No. 1, pp. 54-67, January, 2011.
・Hiroshi Fujiwara: Numerical real inversion of the Laplace transform by reproducing kernel and multiple-precision arithmetic, Proceedings of the 7th International ISAAC Congress, pp. 289-295, August, 2010.